R. Mandel

Berlijn 1976

EIN BEITRAG ZUR REIHENFOLGEPROBLEMATIK

Dissertation (A)

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt der
Mathematisch- Naturwissenschaftlichen Fakultät
des Wissenschaftlichen Rates der
Humboldt- Universität zu Berlin

von
Dipl.- Math. Reinhard Mandel
geboren am 18. September 1950 in Schmiedeberg

Dekan: Prof. Dr. rer. nat. habil. D. Hass

Gutachter: 1. Doz. Dr. rer. nat. B. Bank
2. Doz. Dr. sc. nat. K. Lommatzsch
3. Prof. Dr. sc. nat. E. Seiffart

Berlin, den 27.5.1976

I n h a l t s v e r z e i c h n i s Seite

1. Einleitung 2

2. Problemstellungen 4

3. Darstellungen der Gesamtfertigungszeit 16

4. "Branch and Bound"- eine Konzeption zur Lösung von Reihenfolgeproblemen 41

5. Möglichkeiten der Konstruktion unterer Schranken 47

5.1 Vorbereitende Betrachtungen 47

5.2 Die Johnson´sche Regel 50

5.3 Schrankenbildung für $\overline{RFP}$*1, $\overline{RFP}$*2 und $\overline{RFP}$*3 57

5.4 Schrankenbildung für $\overline{RFP}$ 1, $\overline{RFP}$ 2 und $\overline{RFP}$ 3 75

5.5 Schrankenbildung für RFP*1, RFP*2 und RFP*3 81

5.6 Schrankenbildung für RFP 1, RFP 2 und RFP 3 94

5.7 Bemerkungen zu den Ergebnissen 100

6. Rechentechnische Realisierung eines "Branch and Bound"- Verfahrens zur Lösung von $\overline{RFP}$* 3 105

7. Beispiele 112

8. Zusammenfassung 118

9. Literaturverzeichnis 120

Anlage 1
Anlage 2

1. Einleitung

Eine wichtige Aufgabe bei der Vorbereitung und Organisation von Produktionsprozessen besteht darin, den Ablauf, die (zeitliche) Reihenfolge der Durchführung einzelner Teile der Prozesse festzulegen. Dabei ist zu beachten, daß die Wahl der Reihenfolge derart wichtige Parameter wie die Kosten, die Fertigungszeit, den rationellen Einsatz der Produktionskapazitäten u. ä. beeinflußt und daher einer gründlichen Planung bedarf.

Besonders deutlich wird die zu lösende Aufgabe bei Bearbeitungsprozessen in der Einzel- und Kleinserienproduktion (Werkstattfertigung)+). Bei derartigen Prozessen wird eine vorgegebene Anzahl von Aufträgen (Lose von Aufträgen, Werkstücke, Produkte) in einem bestimmten Zeitabschnitt auf den zur Verfügung stehenden Maschinen (Bearbeitungsstellen, Maschinengruppen) bearbeitet. Dabei ist für jeden Auftrag die (technologische) Reihenfolge, in der er verschiedene Maschinen passieren muß, bekannt. Es kommt nun darauf an, jeder Maschine eine solche Reihenfolge (Auftragsreihenfolge), in welcher die Aufträge auf dieser Maschine zu bearbeiten sind, zuzuordnen, so daß eine bestimmte Zielgröße (Gesamtfertigungszeit aller Aufträge, Stillstandszeiten der Maschinen, Lagerungskosten o. ä.) optimal wird.

Aus der Vielzahl der möglichen bzw. zu berücksichtigenden Produktionsbedingungen und möglichen Optimierungsziele, ergibt sich einerseits die Mannigfaltigkeit spezieller Problemstellungen und andererseits die Komplexität vieler Reihenfolgeprobleme.

Mit der mathematischen Untersuchung von (deterministischen) Reihenfolgeproblemen wurde vor ca. 2o Jahren begonnen. In den Veröffentlichungen findet man sowohl spezielle als auch komplexe Untersuchungen dieser Probleme.
Als Lösungsmethoden kommen dabei zur Anwendung:

1. Kombinatorische Analyse,
2. Ganzzahlige Optimierung,
3. Simulation,
4. Graphische Methoden .

+) vgl. hierzu Dickhut [1o]

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547617_0032

Für bestimmte Problemstellungen sind Verfahren bekannt, die es (im allgemeinen) erlauben, mit vertretbarem Aufwand "mittelgroße" Probleme exakt und größere Probleme mit ausreichender Genauigkeit näherungsweise zu lösen. Für viele Reihenfolgeprobleme existieren jedoch noch keine brauchbaren Lösungsverfahren .

Zusammenstellungen wichtiger Probleme und Lösungsverfahren , die in der Literatur zur Reihenfolgeproblematik behandelt wurden, findet man bei Dickhut [1o] , Mensch [27] , Müller- Merbach [3o] , Conway u. a.[9] und Hoss [16] .

In der vorliegenden Arbeit werden Reihenfolgeprobleme mit gleichen Maschinen- und Auftragsfolgen betrachtet . Das Optimierungsziel wird in allen Problemstellungen die Minimierung der Gesamtdauer des Bearbeitungsprozesses sein . Unter Verwendung der Konzeption "Branch and Bound " werden Möglichkeiten der exakten Lösungdieser Probleme angegeben .

2. Problemstellungen

Gegeben seien ein System von n Maschinen $M_1,\ldots,M_n$ sowie eine Menge von m Aufträgen $A_1,\ldots,A_m$, die auf den Maschinen zu bearbeiten sind.

Der Typ eines Bearbeitungsprozesses, der den betrachteten Reihenfolgeproblemen zugrunde liegt, wird durch die folgenden Bedingungen charakterisiert :

1. $\mathcal{M}_k$ (k=1,...,n) sei die Indexmenge der Aufträge A_i , die auf der Maschine M_k bearbeitet werden.

$\mathcal{A}_i = \{ k_1(i),\ldots,k_{\beta_i}(i) \}$ sei die Indexmenge der Maschinen, die den Auftrag A_i bearbeiten. $M_{k_r(i)}$, $r \in \{1,\ldots,\beta_i\}$, ist dabei die r-te Maschine auf der der Auftrag A_i bearbeitet wird. Für alle (mehrelementigen) Mengen $\mathcal{A}_i$ gilt:

$$k_1(i) < k_2(i) < \ldots\ldots < k_{\beta_i}(i) \qquad (2.1)$$

(g l e i c h e M a s c h i n e n f o l g e n für die Aufträge).

Falls für alle $i \in \{1,\ldots,m\}$ die Mengen $\mathcal{A}_i$ mit der Menge $\{1,\ldots,n\}$ übereistimmen, spricht man von Reihenfolgeproblemen o h n e Ü b e r s p r i n g e n von Maschinen; andernfalls von Reihenfolgeproblemen m i t Ü b e r s p r i n g e n von Maschinen.

Beispiel 2.1 : Es seien m=3 , n=4 und

$\mathcal{A}_1 = \{2,3,4\}$, $\mathcal{A}_2 = \{1,3,4\}$, $\mathcal{A}_3 = \{1,2,3\}$.

Die Mengen $\mathcal{M}_k$ ergeben sich zu

$\mathcal{M}_1 = \{2,3\}$, $\mathcal{M}_2 = \{1,3\}$

$\mathcal{M}_3 = \{1,2,3\}$, $\mathcal{M}_4 = \{1,2\}$.

Der prinzipielle Bearbeitungsablauf läßt sich wie folgt darstellen :

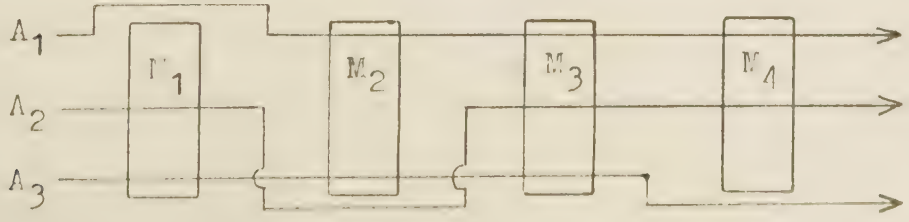


Abb. 2.1

2. $T = (t_{ik})_{m,n}$ sei die Matrix der Bearbeitungszeiten. Dabei bedeutet t_{ik} die Bearbeitungszeit des Auftrages A_i auf der Maschine M_k, falls $i \in \mathfrak{M}_k$ ist; andernfalls wird $t_{ik} = 0$ festgelegt. Die Zeiten $t_{ik} \geq 0$, $i \in \mathfrak{M}_k$, sind konstant und vorgegeben.

3. Jede Maschine kann zu einer bestimmten Zeit nur einen Auftrag bearbeiten, wobei die Bearbeitung ohne zeitliche Unterbrechung erfolgt.

4. Die Auftragsreihenfolgen $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$, wobei $p = (i_1, i_2, \ldots, i_m) \in S$ und S die Menge aller (verschiedenen) Permutationen der Auftragsindizes 1,2,...,m sind, sind für alle Maschinen gleich (g l e i c h e A u f t r a g s f o l g e n für die Maschinen), d.h. auf jeder Maschine M_k werden, die dort zu bearbeitenden Aufträge A_i, $i \in \mathfrak{M}_k$, in der durch $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ festgelegten Reihenfolge bearbeitet (Auftrag A_{i_1} vor Auftrag A_{i_2} usw).

Da jeder Auftragsreihenfolge umkehrbar eindeutig eine Permutation $p = (i_1, \ldots, i_m) \in S$ entspricht, wollen wir jede Auftragsreihenfolge mit der zugehörigen Permutation identifizieren und die Menge S als die Menge aller (zulässigen) Auftragsreihenfolgen ansehen.

Für das Beispiel 2. 1 und p= (3,1,2) läßt sich die Bearbeitungsreihenfolge der Aufträge auf den Maschinen wie folgt darstellen:

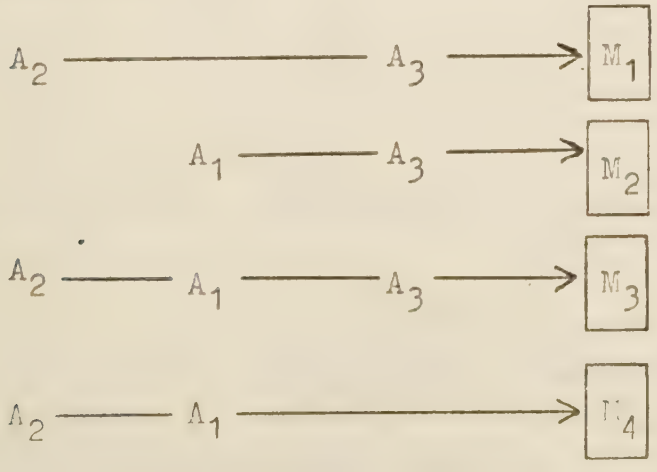


Abb. 2. 2

5. Jeder Auftrag kann gleichzeitig nur eine Maschine belegen. Ein Auftrag kann frühestens dann auf der nachfolgenden Maschine bearbeitet werden, wenn seine Bearbeitung auf der vorhergehenden Maschine abgeschlossen ist.

6. Vor der Bearbeitung eines Auftrages A_i auf jeder Maschine M_k mit $i \in \mathfrak{M}_k$ kann eine Rüstzeit $r_{i\,k} \geq 0$ auftreten. Dabei verstehen wir unter der R ü s t z e i t $r_{i\,k}$ die Zeit, die notwendig ist, um die Maschine M_k für die Bearbeitung des Auftrages A_i vorzubereiten.

6.1 Die Rüstzeiten r_{ik} sind nur von dem Auftrag A_i und der Maschine M_k abhängig (k o n s t a n t e R ü s t z e i t e n). Eine Abhängigkeit der Rüstzeiten von der Auftragsfolge ist nicht zu berücksichtigen bzw. kann vernachlässigt werden.
Die Rüstzeiten sind konstant und vorgegeben. Falls $i \notin \mathfrak{M}_k$ ist, wird $r_{i\,k} = 0$ festgelegt. Mit $R = (r_{i\,k})_{m,n}$ bezeichnen wir die Matrix der Rüstzeiten.

6.2 Es sei $p=(i_1,..,i_m) \in S$. Mit $A_{i_{v(i_1,k)}}$ bezeichnen wir den Auftrag, der unmittelbar vor dem Auftrag A_{i_1} auf der Maschine M_k bearbeitet wird, d.h. es wird

$$v(i_1,k) = \max\{\, s \;/\; 1 \leq s < l \;,\; i_s \in \mathfrak{M}_k \,\} \quad .$$

Wir setzen $v(i_1,k) = 0$, falls vor A_{i_1} kein anderer Auftrag auf der Maschine M_k zu bearbeiten ist, und $v(i_1,k) = l-1$, falls $i_1 \notin \mathfrak{M}_k$ ist.
Die Rüstzeiten hängen davon ab, ob ein Auftrag bzw. welcher Auftrag unmittelbarer Vorgänger des jeweiligen Auftrages A_{i_1} auf der Maschine M_k , $(k=1,..,n)$, ist, d.h. es wird für eine gegebene Auftragsfolge $p=(i_1,..,i_m)$

$$r_{i_1\,k} = r_{i_{v(i_1,k)}\,i_1\,k} \quad , \; i_1 \in \mathfrak{M}_k \;,$$

(r e i h e n f o l g e a b h ä n g i g e R ü s t z e i t e n).
Die Rüstzeiten sind konstant und vorgegeben. Falls $i \notin \mathfrak{M}_k$

oder $j \notin \mathcal{M}_k$, $i \neq j$, ist, vereinbaren wir $r_{i\,j\,k} = 0$. Für jede Maschine M_k , (k=1,..,n), kann damit eine Rüstzeitenmatrix $R_k = (r_{ijk})_{m,m}$ und ein Vektor $R_{0,k} = (r_{i_o\,j\,k})_{m,1}$ aufgestellt werden. Die Diagonalelemente der Matrizen R_k sind jedoch nicht definiert.

7. Für jeden Auftrag A_i können nach der Bearbeitung auf den Maschinen M_k , $k \in \mathcal{A}_i$, Transportzeiten auftreten. Dabei verstehen wir unter der Transportzeit $f_{i\,k} \geq 0$, die Zeit, die notwendig ist, um den Auftrag A_i für die Bearbeitung auf der nächsten in $\mathcal{A}_i$ festgelegten Maschine vorzubereiten.
Falls $k = k_{\beta_i}(i)$ oder $k \notin \mathcal{A}_i$, k=1,..,n-1 , ist, wird $f_{i\,k} = 0$ vereinbart. Die Transportzeiten sind bekannt und konstant (sie hängen nicht von der gewählten Auftragsfolge ab bzw. eine Abhängigkeit von der Auftragsfolge kann vernachlässigt werden).
Mit $F = (f_{ik})_{m,n-1}$ bezeichnen wir die Transportzeitenmatrix.

8. Die Maschinen M_k , (k=1,..,n), stehen zu den Zeitpunkten $t^* + t_k$ für den Bearbeitungsprozeß zur Verfügung. Der Zeitpunkt t_k wird Kapazitätsbelastung der Maschine M_k genannt. Mit $t = (t_k)_{n,1}$ bezeichnen wir den Vektor der Kapazitätsbelastungen. Unter t^* (O.B.d.A. sei $t^* = 0$) verstehen wir den Beginn des gesamten Bearbeitungsprozesses.

9. Jeder Auftrag A_i steht zum Zeitpunkt t^* ($t^* = 0$) zur Bearbeitung auf der Maschine $M_{k_1(i)}$ zur Verfügung.

10. Mit Stillstandszeiten einer Maschine M_k bezeichnen wir Zeitabschnitte, die nach dem Zeitpunkt $t^* + t_k$ auftreten, in denen diese Maschine keinen Auftrag bearbeitet und an ihr keine Rüstarbeiten ausgeführt werden.
Unter Wartezeiten eines Auftrages A_i verstehen wir Zeitabschnitte, in denen dieser Auftrag nicht "transportiert" und nicht auf einer Maschine bearbeitet wird.

Die Stillstandszeiten der Maschinen und Wartezeiten der Aufträge hängen nur von der gewählten Auftragsfolge ab (störungsbedingte Warte - und Stillstandszeiten führen auf stochastische Reihenfolgeprobleme) .

11. Jede Maschine bzw. jeder Auftrag wird so früh als möglich (entsprechend den obigen Bedingungen) mit Aufträgen belegt bzw. auf den Maschinen bearbeitet .

Für Bearbeitungsprozesse, die durch die Bedingungen 1 bis 11 charakterisiert sind , werden drei grundlegende Problemstellungen (RFP 1, RFP 2, RFP 3) und einzelne Spezialisierungen betrachtet . In allen Problemstellungen ist das Optimierungsziel die MINIMIERUNG DER GESAMTFERTIGUNGSZEIT ALLER AUFTRÄGE .

Unter den Voraussetzungen 1 bis 11 wird die Gesamtfertigungszeit eine Funktion $f(p)$, $p \in S$, der Auftragsreihenfolgen . Die Problemstellungen lassen sich dann allgemein folgendermaßen formulieren :

Gesucht ist ein $p^* \in S$, so daß

$$f(p^*) = \min \{ f(p) \;/\; p \in S \}$$

gilt .

Das Reihenfolgeproblem 2 (im weiteren kurz: RFP bezeichnet) unterscheidet sich vom RFP 1 dadurch, daß die folgende Bedingung zu berücksichtigen ist :
Für jeden Auftrag werden zwischen dem Beginn der Bearbeitung auf der (jeweiligen) ersten Maschine und dem Ende der Bearbeitung auf der (jeweiligen) letzten Maschine keine Wartezeiten zugelassen (V e r b o t v o n W a r t e z e i t e n).

Beim RFP 3 ist dagegen die nachfolgende Bedingung zu berücksichtigen :
Für jede Maschine werden zwischen dem Beginn der Bearbeitung des (jeweiligen) ersten Auftrages und dem Ende der Bearbeitung

des (jeweiligen) letzten Auftrages keine Stillstandszeiten zugelassen (Verbot von Stillstands - zeiten) .

Die obigen Bedingungen können sich auf betriebswirtschaftliche Forderungen (z. B. : Verbot von Wartezeiten, um die Lagerkosten gering zu halten; Verbot von Stillstandszeiten, damit die Maschinen durch diesen Bearbeitungsprozeß nur möglichst kurz gebunden werden) oder unmittelbar auf die technologische Struktur des Bearbeitungsprozesses (z. B.: Verbot von Wartezeiten, da keine Lagerungsmöglichkeiten vorhanden sind; durch physikalische oder chemische Umwandlungen können Wartezeiten nicht zugelassen werden) beziehen. Seiffart [34] und Bank [1] führen derartige Beispiele an .

Die in dieser Arbeit betrachteten Reihenfolgeprobleme werden mit den sie kennzeichnenden zusätzlichen Bedingungen in der folgenden Tabelle aufgeführt (die zuberücksichtigenden zusätzlichen Bedingungen sind in den jeweiligen Spalten angekreutzt) :

Reihenfolgeproblem	Bezeichnung der Zielgröße	zusätzliche Bedingungen			
		Verbot von Warte - zeiten	Verbot von Stillstands- zeiten	nur konstante Rüstztn.	ohne Überspringen
RFP 1	f_1				
RFP 2	f_2	X			
RFP 3	f_3		X		
RFP• 1	$\bullet f_1$			X	
RFP• 2	$\bullet f_2$	X		X	
RFP• 3	$\bullet f_3$		X	X	
$\overline{\text{RFP}}$ 1	$\bar{f}_1$				X
$\overline{\text{RFP}}$ 2	$\bar{f}_2$	X			X
$\overline{\text{RFP}}$ 3	$\bar{f}_3$		X		X
$\overline{\text{RFP}}$• 1	$\bullet\bar{f}_1$			X	X
$\overline{\text{RFP}}$• 2	$\bullet\bar{f}_2$	X		X	X
$\overline{\text{RFP}}$• 3	$\bullet\bar{f}_3$		X	X	X

Tabelle 2. 1

Beispiel 2. 2 Wir betrachten ein Beispiel für einen Bearbeitungsprozeß, der den RFP`en RFP*1, RFP*2 und RFP*3 zugrunde liegt .

Es seien $m = 4$, $n = 4$ und

$\mathcal{A}_1 = \{1, 3, 4\}$, $\mathcal{A}_2 = \{2, 3, 4\}$

$\mathcal{A}_3 = \{1, 2, 4\}$, $\mathcal{A}_4 = \{1, 2, 3\}$.

Die Transport-, Rüst- und Bearbeitungszeiten sowie die Kapazitätsbelastungen der Maschinen seien gegeben durch

$$T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad t = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Abbildungen 2. 3 und 2. 4 zeigen die zu den Auftragsfolgen A_1, A_2, A_3, A_4 und A_2, A_1, A_3, A_4 gehörenden G a n t t - D i a g r a m m e [+)] der Probleme RFP*1, RFP*2 und RFP*3 .

Dabei bedeuten

- - - - Kapazitätsbelastungen der Maschinen ,

~ Transportzeiten der Aufträge von der Maschine auf der sie bearbeitet wurden zur nächsten Maschine (die Werte sind auf der Zeitachse ablesbar) ,

——— Bearbeitungszeiten der Aufträge (die Zahl über den Strich gibt den Index des jeweiligen Auftrages an) ,

——— Rüstzeiten der Aufträge .

+) Einzelheiten zur Verwendung von Gantt- Diagrammen s. h. Moore, F. G. [29]

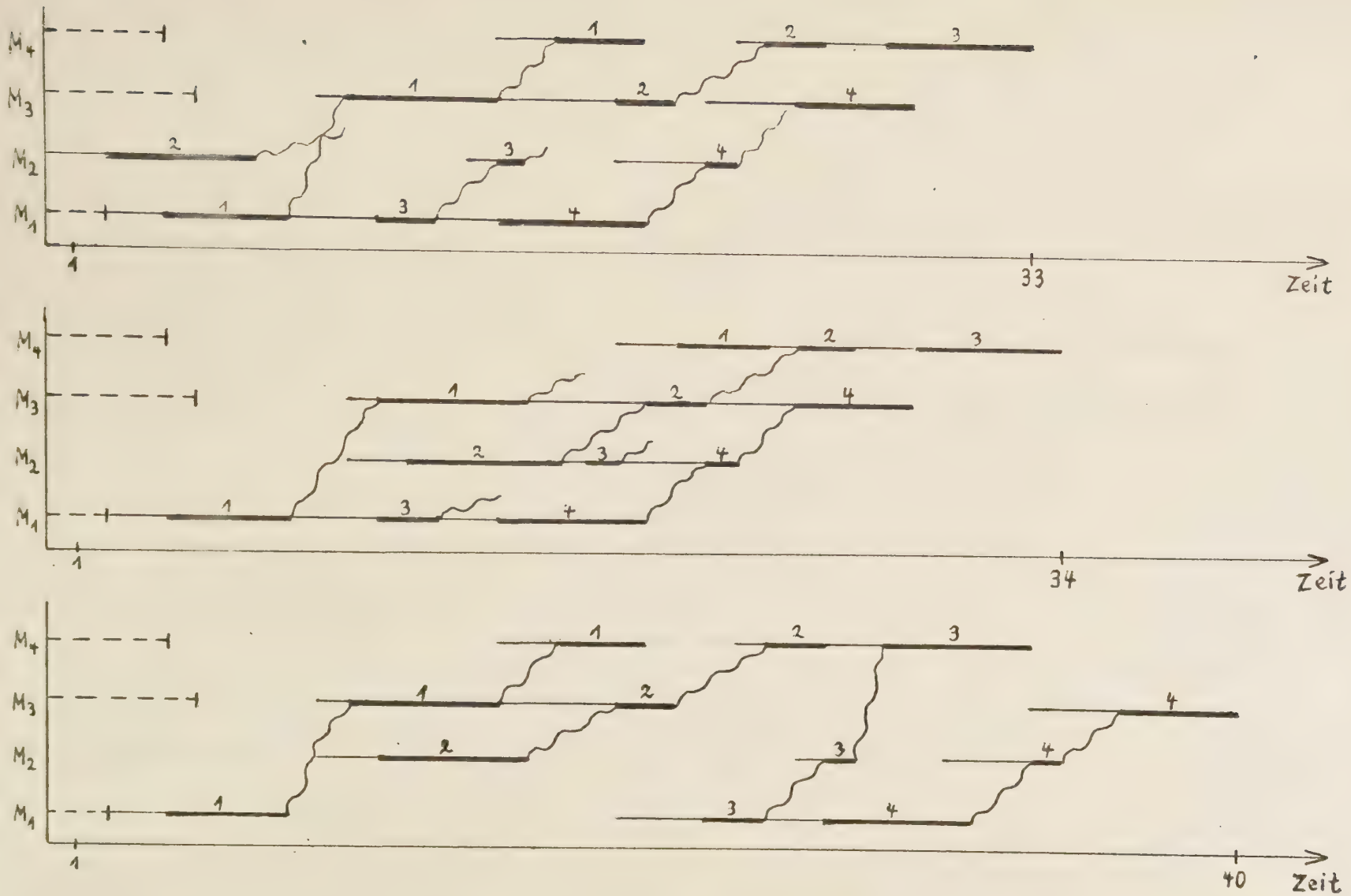


Abb. 2.3 Ablauf der Bearbeitung der Aufträge für p=(1,2,3,4)

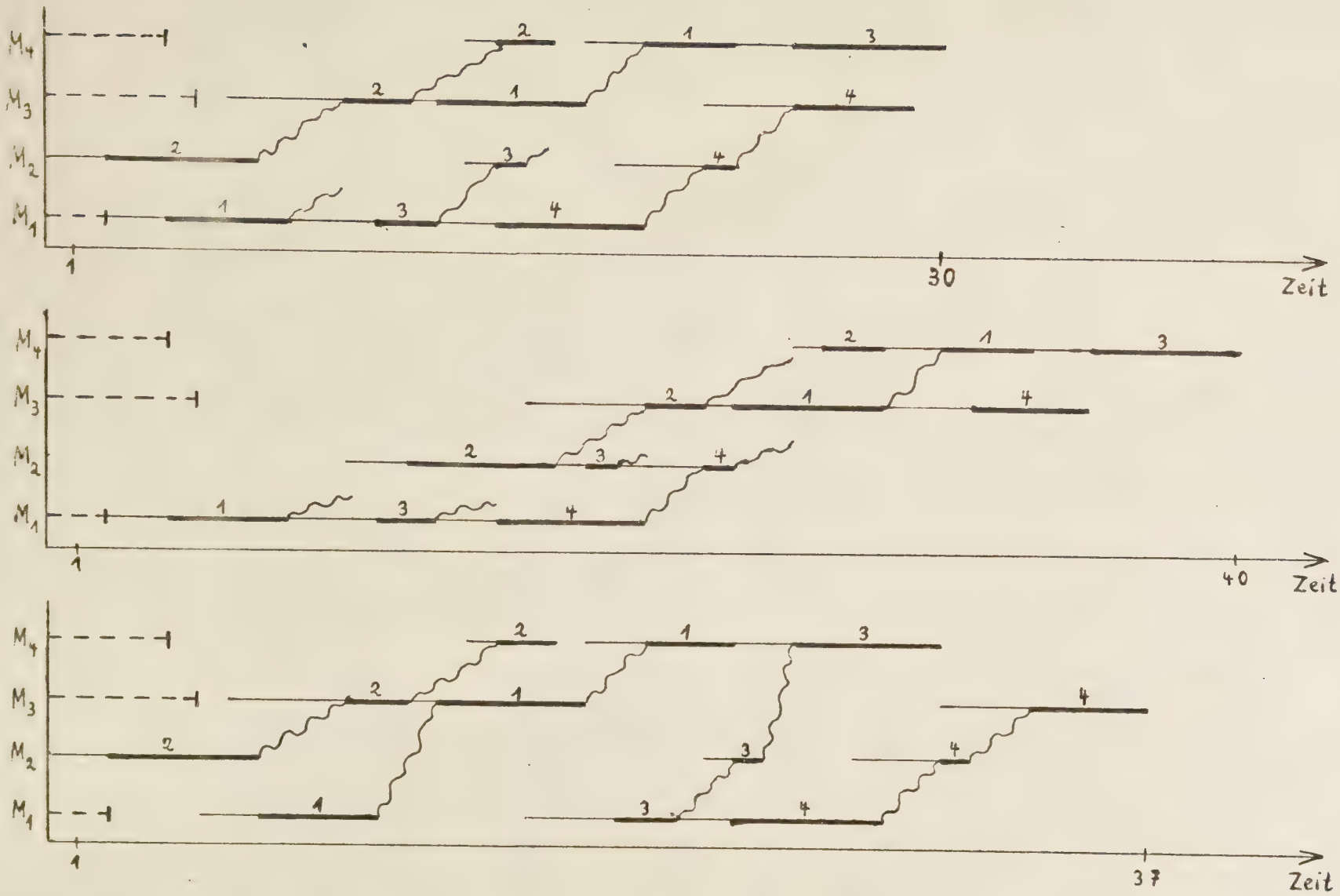


Abb. 2.4 Ablauf der Bearbeitung der Aufträge für p=(2,1,3,4)

Die Diagramme verdeutlichen den Unterschied zwischen den drei Problemstellungen und die Abhängigkeit der Gesamtfertigungszeit von der Auftragsfolge .
Aus den Gantt- Diagrammen sieht man, daß bei der Auftragsfolge p = (1, 2, 3, 4) für die Zielgrößen

$$^*f_1(p) = 33 \quad , \quad ^*f_3(p) = 34 \quad , \quad ^*f_2(p) = 40$$

werden , und bei der Auftragsfolge p = (2, 1, 3, 4)

$$^*f_1(p) = 30 \quad , \quad ^*f_3(p) = 40 \quad , \quad ^*f_2(p) = 37$$ sind .

Grundlegende Arbeiten zu den Reihenfolgeproblemen mit gleichen Maschinen - und Auftragsfolgen (ohne Berücksichtigung von Transport- und Rüstzeiten sowie Kapazitätsbelastungen der Maschinen) stammen von Seiffart [33] , [34] . Die Gesamtfertigungszeit, die Gesamtstillstandszeit der Maschinen und die Gesamtwartezeit aller Aufträge werden dabei als Optimierungsziele herangezogen .

Mit Erweiterungen der von Seiffart behandelten Problemstellungen befassen sich Bräsel, H. [5] und Bräsel, L. [6] . In den von Bräsel, H. untersuchten Problemen wird das Überspringen von Maschinen zugelassen . Von Bräsel, L. werden reihenfolgeabhängige Rüstzeiten berücksichtigt .
Betrachtet man die Problemstellungen in den Arbeiten dieser Autoren bei denen die Gesamtfertigungszeit als Optimierungsziel zugrunde gelegt wird , so stellen sie Spezialisierungen,der in der vorliegenden Arbeit formulierten Probleme RFP 1 , RFP 2 und RFP 3 , dar . Ihnen ist*gemeinsam, daß Transportzeiten ausgeschlossen sind und alle Maschinen beim Beginn des Bearbeitungsprozesses zur Verfügung stehen .

Von Piehler [31] und Seiffart [34] wird unter zusätzlichen Annahmen die Problemstellung $\overline{RFP}^*$ 2 auf Rundreiseprobleme zurückgeführt . Die Zurückführung wird von Hoss [16] auf das Problem $\overline{RFP}^*$ 2 übertragen .In der vorliegenden Arbeit wird auf die Möglichkeit einer derartigen Zurückführung für das Reihenfolgeproblem $\overline{RFP}$ 2 verwiesen .

In einigen Arbeiten u. a. von Seiffart [34] und Bräsel, L. [6] werden Reihenfolgeprobleme mit gleichen Maschinen - und Auftragsfolgen als gemischt- ganzzahlige Optimierungsprobleme formuliert . Diese Modelle besitzen gegenwärtig nur theoretische Bedeutung, da sie mit den bisher bekannten Lösungsverfahren und vorhandenen Rechenanlagen gewöhnlich nicht lösbar sind . Schon für kleine Probleme werden die Anzahl der Variablen und Restriktionen so groß (vgl. auch Hoss [16]) , daß die gemischt - ganzzahligen Modelle keine praktische Bedeutung mehr haben, deshalb wird in dieser Arbeit darauf verzichtet, derartige Modelle aufzustellen .

Müller- Merbach [30] schlägt zur Lösung von Reihenfolgeproblemen Verfahren der begrenzten Enumeration vor .

In verschiedenen Veröffentlichungen u. a. von Seiffart [34] , Bank [1] , Bräsel, H. [5] und Bräsel, L. [6] werden Lösungsverfahren angegeben, denen die Konzeption " Branch and Bound" zugrunde liegt . Eine allgemeine Darstellung der Grundgedanken dieser Konzeption findet man bei Korbut / Finkelstein [22] und Jaeschke [19] .

In der vorliegenden Arbeit werden zur Lösung der angegebenen Reihenfolgeprobleme " Branch and Bound " - Verfahren vorgeschlagen . Dabei sollen unter Verwendung der Grundgedanken der Konzeption " Branch and Bound " spezielle Verfahren entwickelt werden, wobei die Spezifik der Probleme berücksichtigt und ausgenutzt werden soll .

Für die nachfolgenden Untersuchungen und Betrachtungen werden Begriffe, Symbole und Bezeichnungen eingeführt, die sich oft auf mehrere bzw. alle in der Tabelle 2. 1 angeführten RFP`e beziehen . Um Wiederholungen bei den Definitionen zu vermeiden, sei vereinbart, auf die Symbole bzw. Zahlen

$$1 \; , \; 2 \; , \; 3 \; , * \; , - \; , \qquad (2.\,2)$$

welche in der Tabelle 2. 1 zur Kennzeichnung des jeweili-

gen RFP`s benutzt wurden, zu verzichten . Sie werden jedoch dann verwendet, wenn Aussagen nur bezüglich spezieller RFP`e gemacht werden . Wie aus Tabelle 2. 1 ersichtlich ist, werden die obigen Symbole (2. 2) wie folgt verwendet:

1 - kein Verbot von Warte- und Stillstandszeiten;

2 - Verbot von Wartezeiten;

3 - Verbot von Stillstandszeiten;

• - nur konstante Rüstzeiten;

– - ohne Überspringen .

3. Darstellungen der Gesamtfertigungszeit

In diesem Kapitel werden für die einzelnen Probleme Darstellungen für die Gesamtfertigungszeit aller Aufträge hergeleitet . Aus den Darstellungen der Gesamtfertigungszeit für die RFP'e RFP*1 , RFP*2 und RFP*3 lassen sich leicht Darstellungen der Gesamtfertigungszeit für die übrigen in der Tabelle 2 . 1 angegebenen RFP`e ableiten .
Im Abschnitt 3.2 werden rekursive Beschreibungen für die Gesamtfertigungszeit angegeben . Ausgehend von diesen rekursiven Beschreibungen werden im Abschnitt 3.3 analytische Darstellungen der Gesamtfertigungszeit aller Aufträge als Funktion der Auftragsfolgen hergeleitet, in denen nur die gegebenen Größen (Transportzeiten, Rüstzeiten, Bearbeitungszeiten, Kapazitätsbelastungen der Maschinen) auftreten . Mit Hilfe dieser Darstellungen lassen sich unmittelbar Beziehungen zwischen den Reihenfolgeproblemen nachweisen .
Die Probleme $\overline{RFP}$ 2 und $\overline{RFP}$*2 werden im Abschnitt 3.4 auf Rundreiseprobleme zurückgeführt .

3.1 Vorbereitende Betrachtungen

Den Zeitpunkt, zu dem die Bearbeitung des l-ten Auftrages A_{i_l} , $i_l \in \mathcal{M}_k$, in der Auftragsfolge $A_{i_1},\ldots, A_{i_m}$ durch die Maschine M_k (unter den Bedingungen des jeweiligen RFP`s) beendet wird, bezeichnen wir mit $z_{i_l k}$.

Die folgenden Bezeichnungen werden eingeführt :

Es sei $k \in \mathcal{A}_i$. Mit w(k,i) bezeichnen wir den Index der Maschine, auf welcher der Auftrag A_i unmittelbar vorher zu bearbeiten ist. Falls $k=k_1(i)$ ist, definieren wir w(k,i)=0 ;

$A_{i_{\overline{l}(k)}}$ ist der letzte Auftrag der Auftragsfolge $A_{i_1},\ldots,A_{i_m}$, der auf der Maschine M_k zu bearbeiten ist ;

$A_{i_{\underline{l}(k)}}$ ist der erste Auftrag in der Auftragsfolge $A_{i_1},\ldots,A_{i_m}$, der auf der Maschine M_k zu bearbeiten ist .

Es seien die nachfolgenden Mengen definiert :

$$\mathcal{A}_{i_r}(k_{r-1}) = \begin{cases} \mathcal{A}_{i_r} & , \text{ falls } k_{r-1} \in \mathcal{A}_{i_r} \\ k_{r-1} & , \text{ falls } k_{r-1} \notin \mathcal{A}_{i_r} \end{cases} , \tag{3.1.1}$$

$r=1,\ldots,m$;

$$\mathfrak{M}_k(l_{k-1}) = \begin{cases} \mathfrak{M}_k & , \text{ falls } i_{l_{k-1}} \in \mathfrak{M}_k \\ i_{l_{k-1}} & , \text{ falls } i_{l_{k-1}} \notin \mathfrak{M}_k \end{cases} , \tag{3.1.2}$$

$k=1,\ldots,n$;

$$L_{v,n,m} = \{ (l_{v-1},\ldots,l_n) \in \Gamma^{n-v+2} / \; 1=l_{v-1} \leq \ldots \leq l_{n-1} \leq l_n \leq m \; ; \; i_{l_v} \in \mathfrak{M}_v \; ; \; i_{l_s} \in \mathfrak{M}_s(l_{s-1}) \; , \; s=v+1,\ldots,n \; \} , \tag{3.1.3}$$

$$\overline{L}_{v,n,m} = \{ (l_{v-1},\ldots,l_n) \in \Gamma^{n-v+2} \; / \; 1=l_{v-1} \leq \ldots \leq l_{n-1} \leq l_n = m \} , \tag{3.1.4}$$

$$H_{v,n,m} = \{ (l_{v-1},\ldots,l_n) \in \Gamma^{n-v+2} \; / \; l_{v-1}=1 \; , \; i_{l_v} \in \mathfrak{M}_v \; ; \; i_{l_s} \in \mathfrak{M}_s(l_{s-1}) \; , \; s=v+1,\ldots,n \; \} , \tag{3.1.5}$$

$$\overline{H}_{v,n,m} = \{ (l_{v-1},\ldots,l_n) \in \Gamma^{n-v+2} \; / \; l_{v-1}=1 \; , \; l_n=m \; ; \; 1 \leq l_s \leq m \; , \; s=1,\ldots,n-1 \; \} , \tag{3.1.6}$$

$v=1,\ldots,n$;

$$K_{n,m} = \{ (k_o,\ldots,k_m) \in \Gamma^{m+1} \; / \; k_o \in \bigcup_{r=1}^{m} \mathcal{A}_{i_r} \; ; \; 1 \leq k_o \leq \ldots \leq k_{m-1} \leq k_m \leq n \; ; \; k_r \in \mathcal{A}_{i_r}(k_{r-1}) \; , \; r=1,\ldots,m \; \} , \tag{3.1.7}$$

$$\overline{K}_{n,m} = \{ (k_o,\ldots,k_m) \in \Gamma^{m+1} \; / \; 1 \leq k_o \leq \ldots \leq k_{m-1} \leq k_m = n \} , \tag{3.1.8}$$

$$Q_{n,m} = \{ (k_o,\ldots,k_m) \in \Gamma^{m+1} \;/\; k_o \in \bigcup_{r=1}^{m} \mathfrak{A}_{i_r} \;; \quad k_r \in \mathfrak{A}_{i_r}(k_{r-1}) \;,\; r=1,\ldots,m \;\} \;, \tag{3.1.9}$$

$$\overline{Q}_{n,m} = \{ (k_o,\ldots,k_m) \in \Gamma^{m+1} \;/\; k_o=1 \;,\; k_m=n \;;\; 1 \leq k_r \leq n \;,\; r=1,\ldots,m-1 \;\} \;. \tag{3.1.10}$$

In (3.1.3) bis (3.1.10) bedeutet Γ^r ($r=m+1$; $r=n-v+2$ mit $v=1,\ldots,n$) das r-fache Cartesische Produkt der Menge der ganzen Zahlen .

Aus den Definitionen der Mengen $L_{v,n,m}$, $H_{v,n,m}$, $K_{n,m}$ und $Q_{n,m}$ ist ersichtlich, daß sie von der betrachteten Auftragsfolge $A_{i_1},\ldots,A_{i_m}$ abhängen . Man müßte genauer schreiben $L_{v,n,m}(p)$, $H_{v,n,m}(p)$ usw. , $p \in S$, worauf jedoch verzichtet sei.

Beispiel 3.1.1 Es seien $m=3$, $n=3$,
$\mathfrak{A}_1 = \{1 , 3\}$, $\mathfrak{A}_2 = \{2 , 3\}$ und $\mathfrak{A}_3 = \{1 , 3\}$.
Somit sind
$\mathfrak{M}_1 = \{1 , 3\}$, $\mathfrak{M}_2 = \{2 , 3\}$, $\mathfrak{M}_3 = \{1 , 2 , 3\}$.

Für $p = (1,2,3)$, d.h. $i_1=1$, $i_2=2$ und $i_3=3$,
erhalten wir

$$L_{2,3,3} = \{ (1,2,2) , (1,2,3) , (1,3,3) \} \;,$$

$$H_{2,3,3} = \{ (1,2,1) , (1,2,2) , (1,2,3) , (1,3,1) , (1,3,3) , (1,3,2) \} \;.$$

Dagegen entstehen für $p = (3,2,1)$

$$L_{2,3,3} = \{ (1,1,1) , (1,1,2) , (1,1,3) , (1,2,2) , (1,2,3) \} \;,$$

$$H_{2,3,3} = \{ (1,1,1) , (1,1,2) , (1,1,3) , (1,2,1) , (1,2,2) , (1,2,3) \} \;.$$

Zur Vereinfachung der Bezeichnungsweise in den nachfolgenden Untersuchungen vereinbaren wir :

$$z_{i\,o} = 0 \quad , \quad i=1,\ldots,m \quad ; \tag{3.1.11}$$

$$f_{i\,o} = f_{i\,n} = 0 \quad , \quad i=1,\ldots,m \quad ; \tag{3.1.12}$$

$$z_{i_o k} = t_k \quad , \quad k=1,\ldots,n \quad . \tag{3.1.13}$$

3.2 Rekursive Beschreibung der Gesamtfertigungszeit

In diesem Abschnitt werden mit Hilfe der Fertigungszeiten $z_{i_\lambda k}$ der einzelnen Aufträge auf den Maschinen, welche sich selbst rekursiv berechnen lassen, rekursive Darstellungen der Gesamtfertigungszeit für die einzelnen Problemstellungen hergeleitet . Sie bilden die Grundlage für die Ableitung der nachfolgenden analytischen Darstellungen der Gesamtfertigungszeit als Funktion der Auftragsfolgen und für die Berechnung von unteren Schranken, die im Kapitel 5 konstruiert werden sollen.

Das RFP* 1

Im RFP* 1 können Warte- und Stillstandszeiten auftreten, deshalb haben wir bei der Angabe der $z_{i_l k}$, $l=1,\ldots,m$, $k=1,\ldots,n$ und $i_l \in \mathfrak{M}_k$, zwei Fälle zu betrachten .

1. Fall : Die Maschine M_k wartet auf die Bearbeitung des Auftrages A_{i_l} , d.h. sie steht still (gegebenenfalls ist die Stillstandszeit Null) . Dann gilt nach Kapitel 2 (insbesondere Bedingung 11)

$$z_{i_l k} = z_{i_l w(k,i_l)} + f_{i_l w(k,i_l)} + t_{i_l k} \quad . \tag{3.2.1}$$

2. Fall : Der Auftrag A_{i_l} wartet vor der Maschine M_k auf seine Bearbeitung (gegebenenfalls ist die Wartezeit Null) . Offenbar ist dann nach Kapitel 2

$$z_{i_l k} = z_{i_{v(i_l,k)} k} + r_{i_l k} + t_{i_l k} \quad . \tag{3.2.2}$$

Aus (3.2.1) und (3.2.2) ergibt sich

$$z_{i_1 k} = t_{i_1 k} + \max \{ z_{i_1 w(k,i_1)} + f_{i_1 w(k,i_1)} \; , \; z_{i_{v(i_1,k)} k} + r_{i_1 k} \} \; , \tag{3.2.3}$$

für $1=1,\ldots,m$, $k=1,\ldots,n$ und $i_1 \in \mathfrak{M}_k$.

Die Gesamzfertigungszeit $^*f_1(p)$ ist darstellbar als

$$^*f_1(p) = \max_{1 \le k \le n \atop k=k_{\beta_{i_{\mathfrak{I}(k)}}}(i_{\mathfrak{I}(k)})} z_{i_{\mathfrak{I}(k)} k} \quad \text{bzw.} \quad ^*f_1(p) = \max_{1 \le k \le n} z_{i_{\mathfrak{I}(k)} k} \tag{3.2.4}$$

oder

$$^*f_1(p) = \max_{1 \le l \le m \atop i_l = i_{\mathfrak{I}(k_{\beta_{i_l}}(i_l))}} z_{i_l k_{\beta_{i_l}}(i_l)} \quad \text{bzw.} \quad ^*f_1(p) = \max_{1 \le l \le m} z_{i_l \, k_{\beta_{i_l}}(i_l)} . \tag{3.2.5}$$

Mit den Vereinbarungen (3.1.11) bis (3.1.13) , den Gleichungen (3.2.3) und (3.2.4) bzw. (3.2.5) haben wir eine rekursive Beschreibung der Gesamtfertigungszeit $^*f_1(p)$ für die beliebig festgewählte Auftragsfolge $A_{i_1},\ldots,A_{i_m}$, $p=(i_1,\ldots,i_m) \in S$.

Das RFP* 2

Für dieses Problem sind keine Wartezeiten zugelassen, daher wird

$$z_{i_1 k} = z_{i_1 k_1(i_1)} + \sum_{\mu=k_1(i_1)+1}^{k} (t_{i_1 \mu} + f_{i_1 w(\mu,i_1)}) \; , \tag{3.2.6}$$

für $1=1,\ldots,m$ und $k \in \mathcal{U}_{i_1}$. Weil ein Auftrag A_{i_1} erst auf der Maschine M_k , $i_1 \in \mathfrak{M}_k$, bearbeitet werden kann, wenn der vorhergehende Auftrag $A_{i_{v(i_1,k)}}$ vollständig bearbeitet und die Maschine umgerüstet ist, erhalten wir

$$z_{i_l k} \geq z_{i_{v(i_l,k)}\, k} + r_{i_l\, k} + t_{i_l\, k} \quad , \tag{3.2.7}$$

$l=1,\ldots,m$, $k=1,\ldots,n$ und $i_l \in \mathfrak{M}_k$.

Nach Bedingung 11 aus Kapitel 2 wird jede Maschine so früh wie möglich mit Aufträgen belegt. Da keine Wartezeiten zugelassen werden, folgt hieraus, daß es für jeden Auftrag A_{i_l} mindestens eine Maschine $M_{k^*_{l-1}}$, $k^*_{l-1} \in \mathfrak{A}_{i_l}$, gibt, auf der die Bearbeitung des Auftrages A_{i_l} unmittelbar, nachdem diese Maschine umgerüstet ist, begonnen wird, d.h.

$$z_{i_l k^*_{l-1}} = z_{i_{v(i_l,k^*_{l-1})}\, k^*_{l-1}} + r_{i_l k^*_{l-1}} + t_{i_l k^*_{l-1}} \quad , \tag{3.2.8}$$

für $l=1,\ldots,m$.

Unter Berücksichtigung der Festlegungen (3.1.12) und (3.1.13) erhalten wir aus (3.2.6), (3.2.7) und (3.2.8)

$$z_{i_l k} = \max_{k_{l-1} \in \mathfrak{A}_{i_l}} \Big\{ z_{i_{v(i_l,k_{l-1})}\, k_{l-1}} + r_{i_l k_{l-1}} - f_{i_l k} + \sum_{\mu=1}^{k} (t_{i_l \mu} + f_{i_l \mu}) - \sum_{\mu=1}^{k_{l-1}-1} (t_{i_l \mu} + f_{i_l \mu}) \Big\} \tag{3.2.9}$$

für $l=1,\ldots,m$, $k=1,\ldots,n$ und $i_l \in \mathfrak{M}_k$.

Die Gesamtfertigungszeit $^*f_2(p)$ ist darstellbar als

$$^*f_2(p) = \max_{1 \leq l \leq m} z_{i_l k_{\beta_{i_l}}(i_l)} \tag{3.2.10}$$

bzw.

$$^*f_2(p) = \max_{\substack{1 \leq l \leq m \\ i_l = i_{\bar{l}}(k_{\beta_{i_l}}(i_l))}} z_{i_l\, k_{\beta_{i_l}}(i_l)} \tag{3.2.11}$$

Die Beziehungen (3.2.9),(3.1.12),(3.1.13) und (3.2.10) bzw.

(3.2.11) bilden eine rekursive Beschreibung der Gesamtfertigungszeit $^{*}f_2(p)$, $p \in S$.

Das RFP* 3

Für dieses Problem wurden Stillstandszeiten der Maschinen ausgeschlossen. Daher ergibt sich

$$z_{i_l\,k} = z_{i_{\underline{l}(k)}\,k} + \sum_{\varrho=\underline{l}(k)+1}^{l} (t_{i_\varrho k} + r_{i_\varrho k}) \quad , \tag{3.2.13}$$

$k=1,\ldots,n$ und $i_l \in \mathfrak{M}_k$. Da jeder Auftrag A_{i_l} , $l=1,\ldots,m$, erst dann auf den Maschinen $M_{k_2(i_1)},\ldots, M_{k_{\beta_{i_1}}(i_1)}$ bearbeitet werden kann, wenn der Auftrag auf der vorhergehenden Maschine bearbeitet wurde und die Transportzarbeiten beendet sind, erhalten wir

$$z_{i_l\,k} \geq z_{i_l\,w(k,i_l)} + f_{i_l\,w(k,i_l)} + t_{i_l k} \quad , \tag{3.2.14}$$

$l=1,\ldots,m$, $k=1,\ldots,n$ und $i_l \in \mathfrak{M}_k$.

Für den Beginn der Bearbeitung des Auftrages $A_{i_{\underline{l}(k)}}$ auf der Maschine M_k , $k=1,\ldots,n$, ist noch zu berücksichtigen, daß die Maschine zur Verfügung stehen muß, d.h.

$$z_{i_{\underline{l}(k)}\,k} \geq t_k + r_{i_{\underline{l}(k)}k} + t_{i_{\underline{l}(k)}\,k} \quad , \tag{3.2.15}$$

$k=1,\ldots,n$.

Entsprechend Bedingung 11 aus Kapitel 2 wird jeder Auftrag so früh wie möglich auf den Maschinen bearbeitet, d.h. es gilt

$$z_{i_{\underline{l}(k)}\,k} = t_k + r_{i_{\underline{l}(k)}\,k} + t_{i_{\underline{l}(k)}\,k} \tag{3.2.16}$$

oder es gibt ein l^*_{k-1} mit:

$$z_{i_{l^*_{k-1}}\,k} = z_{i_{l^*_{k-1}}\,w(k,i_{l^*_{k-1}})} + f_{i_{l^*_{k-1}}\,w(k,i_{l^*_{k-1}})} + t_{i_{l^*_{k-1}}\,k} \tag{3.2.17}$$

$k=1,\ldots,n$ und $i_{l^*_{k-1}} \in \mathfrak{M}_k$.

Falls (3.2.16) erfüllt ist, stellen wir fest, daß

$$z_{i_l\,k} = t_k + \sum_{\varrho=1}^{l} (t_{i_\varrho k} + r_{i_\varrho k}) \quad , \quad i_l \in \mathfrak{M}_k \, , \tag{3.2.18}$$

gilt.
Aus (3.2.13),(3.2.14) und (3.2.17) folgt

$$\begin{aligned} z_{i_l\,k} = \max_{i_{l_{k-1}} \in \mathfrak{M}_k} \Big\{ & z_{i_{l_{k-1}} w(k,i_{l_{k-1}})} + f_{i_{l_{k-1}} w(k,i_l)} \\ & + t_{i_{l_{k-1}} k} - \sum_{\varrho=\underline{l}(k)+1}^{l_{k-1}} (t_{i_\varrho k} + r_{i_\varrho k}) \Big\} \\ & + \sum_{\varrho=\underline{l}(k)+1}^{l} (t_{i_\varrho k} + r_{i_\varrho k}) \\ = \max_{i_{l_{k-1}} \in \mathfrak{M}_k} \Big\{ & z_{i_{l_{k-1}} w(k,i_{l_{k-1}})} + f_{i_{l_{k-1}} w(k,i_{l_{k-1}})} \\ & - r_{i_{l_{k-1}} k} + \sum_{\varrho=1}^{l} (t_{i_\varrho k} + r_{i_\varrho k}) \\ & - \sum_{\varrho=1}^{l_{k-1}-1} (t_{i_\varrho k} + r_{i_\varrho k}) \Big\} . \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

Die Beziehungen (3.2.18) und (3.2.19) liefern

$$\begin{aligned} z_{i_l\,k} = \max \Big[& t_k + \sum_{\varrho=1}^{l} (t_{i_\varrho k} + r_{i_\varrho k}) \quad , \\ & \max_{i_{l_{k-1}} \in \mathfrak{M}_k} \Big\{ z_{i_{l_{k-1}} w(k,i_{l_{k-1}})} + f_{i_{l_{k-1}} w(k,i_{l_{k-1}})} \\ & - r_{i_{l_{k-1}} k} + \sum_{\varrho=1}^{l} (t_{i_\varrho k} + r_{i_\varrho k}) - \sum_{\varrho=1}^{l_{k-1}-1} (t_{i_\varrho k} + r_{i_\varrho k}) \Big\} \Big], \end{aligned}$$

$i_l \in \mathfrak{M}_k$. (3.2.20)

Die Gesamtfertigungszeit $^{*}f_3(p)$ ist darstellbar als

$$^{*}f_3(p) = \max_{1\leq k\leq n} z_{i_{\bar{I}(k)}\,k} \tag{3.2.21}$$

bzw.

$$^{*}f_3(p) = \max_{\substack{1\leq k\leq n \\ k=k_{\beta_{i_{\bar{I}(k)}}}(i_{\bar{I}(k)})}} z_{i_{\bar{I}(k)}\,k} \tag{3.2.22}$$

Die Beziehungen (3.2.20) und (3.2.21) bzw. (3.2.22) liefern unter Beachtung der Vereinbarungen (3.1.11) und (3.1.12) eine rekursive Beschreibung der Gesamtfertigungszeit $^{*}f_3(p)$.

Die Reihenfolgeprobleme $\overline{RFT}^{*}1$, $\overline{RFP}^{*}2$ und $\overline{RFP}^{*}3$

Für diese Probleme haben wir

$$\mathcal{O}_i = \{1, 2, \ldots, n\} \quad , \; i=1,\ldots,m \; ,$$

$$\mathcal{M}_k = \{1, 2, \ldots, m\} \quad , \; k=1,\ldots,n \; .$$

Danach ergibt sich:

$$z_{i_{\bar{I}(k)}\,k} = z_{i_m\,k} \quad , \; k=1,\ldots,n \; ;$$

$$k_{\beta_{i_1}}(i_1) = n \quad , \; l=1,\ldots,m \; ;$$

$$v(i_1,k) = l-1 \quad , \; l=1,\ldots,m \; ;$$

$$w(k,i_1) = k-1 \quad , \; k=1,\ldots,n \; .$$

Damit erhalten wir unmittelbar aus den rekursiven Beschreibungen von $^{*}f_1(p)$, $^{*}f_2(p)$ und $^{*}f_3(p)$:

$\overline{RFP}^{*}1$:

$$^{*}\bar{f}_1(p) = z_{i_m\,n} \; ; \tag{3.2.23}$$

$$z_{i_1\,k} = t_{i_1 k} + \max\{z_{i_1 k-1} + f_{i_1 k-1} \, , \, z_{i_{l-1} k} + r_{i_1 k}\} \; ,$$

für $l=1,\ldots,m$ und $k=1,\ldots,n$, wobei $z_{i_0 k}$, (3.2.24)

$z_{i_1 0}$ und $f_{i_1 0}$ durch (3.1.11) bis (3.1.13) definiert sind.

$\overline{RFP}^*2$: $$ {}^*\bar{f}_2(p) = z_{i_m n} \quad ; \tag{3.2.25}$$

$$z_{i_l k} = \max_{1\le k_{l-1}\le n} \{ z_{i_{l-1}k_{l-1}} + r_{i_l k_{l-1}} - f_{i_l k} + \sum_{\mu=1}^{k} (t_{i_l\mu} + f_{i_l\mu}) - \sum_{\mu=1}^{k_{l-1}-1} (t_{i_l\mu} + f_{i_l\mu}) \} , \tag{3.2.26}$$

für $l=1,\ldots,m$ und $k=1,\ldots,n$, wobei $z_{i_o k}$ und $f_{i_l n}$ durch (3.1.13) und (3.1.12) definiert sind.
Insbesondere ergeben sich

$$z_{i_1 n} = \max_{1\le k_o\le n} \{ t_{k_o} + r_{i_1 k_o} + \sum_{\mu=k_o}^{n-1} f_{i_1\mu} + \sum_{\mu=k_o}^{n} t_{i_1\mu} \} , \tag{3.2.27}$$

$$z_{i_l n} = z_{i_{l-1} n} + \max_{1\le k_{l-1}\le n} \{ r_{i_l k_{l-1}} + \sum_{\mu=k_{l-1}}^{n} (t_{i_l\mu} - t_{i_{l-1}\mu}) + \sum_{\mu=k_{l-1}}^{n-1} (f_{i_l\mu} - f_{i_{l-1}\mu}) \} , \tag{3.2.28}$$

$l=2,\ldots,m$.

$\overline{RFP}^*3$: $$ {}^*\bar{f}_3(p) = z_{i_m n} \quad ; \tag{3.2.29}$$

$$z_{i_l k} = \max \Big[t_k + \sum_{\varrho=1}^{l} (t_{i_\varrho k} + r_{i_\varrho k}) \ , \max_{1\le l_{k-1}\le m} \{ z_{i_{l_{k-1}} k-1} + f_{i_{l_{k-1}} k-1} - r_{i_{l_{k-1}} k} + \sum_{\varrho=1}^{l} (t_{i_\varrho k} + r_{i_\varrho k}) - \sum_{\varrho=1}^{l_{k-1}-1} (t_{i_\varrho k} + r_{i_\varrho k}) \} \Big], \tag{3.2.30}$$

für $l=1,\ldots,m$ und $k=1,\ldots,n$, wobei $z_{i_l 0}$ und $f_{i_l 0}$ durch (3.1.11) und (3.1.12) festgelegt sind.

Für $z_{i_m\,k}$ können wir schreiben

$$z_{i_m\,1} = t_1 + \sum_{\varrho=1}^{m}(t_{i_\varrho 1} + r_{i_\varrho 1}) \quad , \tag{3.2.31}$$

$$z_{i_m\,k} = \max\Big[\, t_k + \sum_{\varrho=1}^{m}(t_{i_\varrho k} + r_{i_\varrho k}) \,,\quad z_{i_m\,k-1}$$

$$+ \max_{1\le l_{k-1}\le m}\Big\{ f_{i_{l_{k-1}}\,k-1} + t_{i_{l_{k-1}}\,k}$$

$$+ \sum_{\varrho=l_{k-1}+1}^{m}(t_{i_\varrho k} + r_{i_\varrho k} - t_{i_\varrho k+1} - r_{i_\varrho k-1})\Big\}\Big] , \tag{3.2.32}$$

$k=2,\ldots,n$.

Die Reihenfolgeprobleme mit reihenfolgeabhängigen Rüstzeiten

Diese Reihenfolgeprobleme unterscheiden sich von den ihnen entsprechenden Reihenfolgeproblemen mit konstanten Rüstzeiten nur dadurch, daß anstelle der konstanten Rüstzeiten aus Bedingung 6.1 die reihenfolgeabhängigen Rüstzeiten gemäß 6.2 zu betrachten sind. Da die Gesamtfertigungszeit eine Funktion der Auftragsfolge ist und die reihenfolgeabhängigen Rüstzeiten von der Auftragsfolge und nur von dieser abhängen, entstehen aus den rekursiven Beschreibungen für ${}^{\bullet}f_s(p)$ bzw. ${}^{\bullet}\bar{f}_s(p)$, $s=1,2,3$ und $p\in S$, die Darstellungen für $f_s(p)$ bzw. $\bar{f}_s(p)$, wenn wir $r_{i_\varrho k}$ durch $r_{i_{v(i_\varrho,k)}\,i_\varrho\,k}$ bzw. $r_{i_{\varrho-1}\,i_\varrho\,k}$ ersetzen.
Auf die explizite Angabe dieser rekursiven Beschreibungen sei an dieser Stelle verzichtet.

Folgerung 3.2 Für die Berechnung der Fertigungszeit $z_{i_\lambda k}$ des Auftrages A_{i_λ} auf der Maschine M_k , $i_\lambda \in \mathfrak{M}_k$, folgt aus den obigen rekursiven Beschreibungen :

RFP 1 : Die Fertigstellungszeit $z^1_{i_\lambda k}$ hängt nur von den Fertig-

stellungszeiten $z^1_{i_l s}$ ab, $l=1,\ldots,\lambda$, $s=1,\ldots,k$ und $i_l \in \mathcal{M}_s$.

RFP 2 : Die Fertigstellungszeit $z^2_{i_\lambda k}$ hängt nur von den $z^2_{i_l s}$ ab, $l=1,\ldots,\lambda$, $s=1,\ldots,n$ und $i_l \in \mathcal{M}_s$.

RFP 3 : Die Fertigstellungszeit $z^3_{i_\lambda k}$ hängt nur von den $z^3_{i_l s}$ ab, $l=1,\ldots,m$, $s=1,\ldots,k$ und $i_l \in \mathcal{M}_s$.

Für RFP 1 und RFP2 ergibt sich also, daß die Fertigstellungszeit des Auftrages A_{i_λ} auf der Maschine M_k invariant ist bzgl. der Reihenfolge der noch zu bearbeitenden Aufträge $A_{i_{\lambda+1}}$,.. ..,A_{i_m} .

Analoge Aussagen gelten für die in der Tabelle 2.1 angegebenen Spezialisierungen von RFP 1, RFP 2 und RFP 3 .

3.3 Analytische Darstellungen der Gesamtfertigungszeit

In diesem Abschnitt werden zuerst analytische Darstellungen der Gesamtfertigungszeit für die Reihenfolgeprobleme RFP*1 , RFP*2 und RFP*3 hergeleitet, mit deren Hilfe man Darstellungen der Gesamtfertigungszeit für die anderen Reihenfolgeprobleme ableiten kann.

Satz 3.3.1 : Es sei $p \in S$ beliebig festgewählt. Für ${}^*f_1(p)$ gilt :

$$ {}^*f_1(p) = \max_{1\le v\le n} \Big\{ \max_{L_{v,n,m}} \Big\{ t_v + \sum_{\mu=v}^{n} \sum_{\lambda=l_{\mu-1}}^{l_\mu} (t_{i_\lambda \mu} + r_{i_\lambda \mu}) + \sum_{\mu=v}^{n-1} (f_{i_{l_\mu} \mu} - r_{i_{l_\mu} \mu+1}) \Big\} \Big\} . \qquad (3.3.1) $$

Beweis : Die Maximierungsglieder auf der rechten Seite von (3.3.1) haben die Form

$$ W(v,l_{v-1},\ldots,l_n)) = t_v + \sum_{\mu=v}^{n} \sum_{\lambda=l_{\mu-1}}^{l_\mu} (t_{i_\lambda \mu} + r_{i_\lambda \mu}) + \sum_{\mu=v}^{n-1} (f_{i_{l_\mu} \mu} - r_{i_{l_\mu} \mu+1}) \quad , \qquad (3.3.2) $$

wobei $v \in \{1,..,n\}$ und $(l_{v-1},..,l_n) \in L_{v,n,m}$ sind.

Es seien $v^* \in \{1,..,n\}$ und $(l_{v^*-1},..,l_n) \in L_{v^*,n,m}$ beliebig gewählt. Aus dem Gleichungssystem

$$z'_{i_o v^*} = z_{i_o v^*} \quad ,$$

$$z'_{i_\lambda v^*} = t_{i_\lambda v^*} + z'_{i_{\lambda-1} v^*} + r_{i_\lambda v^*} \quad , \text{ für } l_{v^*-1} \leq \lambda \leq l_{v^*} \; ;$$

$$z'_{i_\lambda \mu} = t_{i_\lambda \mu} + z'_{i_\lambda \mu-1} + f_{i_\lambda \mu-1} \quad , \text{ für } \lambda = l_{\mu-1} \quad ,$$

$$z'_{i_\lambda \mu} = t_{i_\lambda \mu} + z'_{i_{\lambda-1} \mu} + r_{i_\lambda \mu} \quad , \text{ für } l_{\mu-1} < \lambda \leq l_\mu \; , \qquad (3.3.3)$$

$(\mu = v^*+1,..,n)$, erhalten wir als Lösung für $z'_{i_{l_n} n}$:

$$z'_{i_{l_n} n} = \mathcal{M}(v^*,(l_{v-1},..,l_n)) \quad . \qquad (3.3.4)$$

Gemäß den Vereibarungen für f_{ik} , t_{ik} und r_{ik} , falls $i \notin \mathfrak{M}_k$ ist, gilt für alle $z'_{i_\lambda \mu}$ mit $i_\lambda \notin \mathfrak{M}_\mu$:

$$z'_{i_\lambda \mu} = z'_{i_\lambda \mu-1} \quad , \text{ falls } \lambda = l_\mu \text{ ist,} \qquad (3.3.5)$$

und

$$z'_{i_\lambda \mu} = z'_{i_{\lambda-1} \mu} \quad , \text{ falls } l_{\mu-1} < \lambda < l_\mu \text{ ist.} \qquad (3.3.6)$$

Damit können wir für (3.3.3) schreiben

$$z'_{i_o v^*} = z_{i_o v^*} \quad ,$$

$$z'_{i_\lambda v^*} = t_{i_\lambda v^*} + z'_{i_{v(i_\lambda, v^*)} v^*} + r_{i_\lambda v^*} \quad , \text{ für } l_{v^*-1} \leq \lambda \leq l_{v^*} \text{ und } i_\lambda \in \mathfrak{M}_{v^*} \; ;$$

$$z'_{i_\lambda \mu} = t_{i_\lambda \mu} + z'_{i_\lambda w(\mu,i_\lambda)} + f_{i_\lambda w(\mu,i_\lambda)} \quad , \text{ falls } \lambda = l_{\mu-1} \text{ ist,}$$

$$z'_{i_\lambda \mu} = t_{i_\lambda \mu} + z'_{i_{v(i_\lambda,\mu)}} + r_{i_\lambda \mu} \quad , \text{ falls } l_{\mu-1} < \lambda \leq l_\mu \text{ ist,}$$

wobei $\mu = v^*+1,..,n$ und $i_\lambda \in \mathfrak{M}_\mu$ sind.

Für $z'_{i_{l_n} n}$ ergibt sich

$$z'_{i_{l_n} n} = z'_{i_{l_n} k_{\beta i_{l_n}}(i_{l_n})} \quad , \qquad (3.3.8)$$

wobei $M_{k_{\beta i_{l_n}}(i_{l_n})}$ die letzte Maschine ist, auf der der Auftrag

$A_{i_{l_n}}$ zu bearbeiten ist.

Nach (3.2.3) können wir jedes $z'_{i_\lambda \mu}$, $i_\lambda \in \mathfrak{M}_\mu$, aus (3.3.7) durch $z_{i_\lambda \mu}$ nach oben abschätzen, d.h.

$$z'_{i_\lambda \mu} \leq z_{i_\lambda \mu} \quad . \tag{3.3.9}$$

Mit (3.3.4),(3.3.8) und(3.3.9) folgt aus (3.2.5)

$$\mathfrak{W}(v^*,(l_{v^*-1},..,l_n)) \leq {}^*f_1(p) \quad . \tag{3.3.10}$$

Da v^* und $(l_{v^*-1},..,l_n) \in L_{v^*,n,m}$ beliebig waren, ist demnach

$${}^*f_1(p) \geq \max_{1\leq v\leq n} \{ \max_{L_{v,n,m}} \{ \mathfrak{W}(v,(l_{v-1},..,l_n)) \} \} \quad . \tag{3.3.11}$$

Wir zeigen nun, daß es auf der rechten Seite von (3.3.1) ein Maximierungsglied $\mathfrak{W}(\grave{v},(\grave{l}_{\grave{v}-1},..,\grave{l}_n))$ gibt mit

$${}^*f_1(p) = \mathfrak{W}(\grave{v},(\grave{l}_{\grave{v}-1},..,\grave{l}_n)) \quad .$$

Hierzu betrachten wir die durch (3.2.3) , (3.2.5) und (3.1.11) bis (3.1.11) gegebene rekursive Beschreibung von ${}^*f_1(p)$.
Es sei

$${}^*f_1(p) = z_{i_{l^*}\, k_{\beta_{i_{l^*}}}(i_{l^*})} \quad . \tag{3.3.12}$$

Wir setzen $\grave{l}_s = l^*$, $s = k_{\beta_{i_{l^*}}}(i_{l^*}),\ldots,n$.

Bei der Konstruktion der Indizes $\grave{l}_\mu$, $\mu = \grave{v}-1,..,k_{\beta_{i_{l^*}}}(i_{l^*}) -1$, wobei zuerst $\grave{l}_{k_{\beta_{i_{l^*}}}(i_{l^*}) -1}$ gebildet wird, und $\grave{v}$ gehen wir wie folgt vor :

(1) Falls $\mu+1 > k_1(i_{\grave{l}_{\mu+1}})$ und

$$z'_{i_{\grave{l}_{\mu+1}}\mu+1} = t_{i_{\grave{l}_{\mu+1}}\mu+1} + z_{i_{\grave{l}_{\mu+1}}w(\mu+1,i_{\grave{l}_{\mu+1}})} + f_{i_{\grave{l}_{\mu+1}}w(\mu+1,i_{\grave{l}_{\mu+1}}}$$

sind, setzen wir $\grave{l}_s = \grave{l}_{\mu+1}$, $s=w(\mu+1,i_{\grave{l}_{\mu+1}}),\ldots,\mu$, und bilden $\grave{l}_{w(\mu+1,i_{\grave{l}_{\mu+1}})-1},\ldots,\grave{l}_{\grave{v}-1}$; andernfalls überprüfen wir (2) .

(2) Falls für alle Elemente $\varrho \in \{1,\dots,l_{\mu+1}\}$ mit $i_\varrho \in \mathfrak{M}_{\mu+1}$

$$z_{i_\varrho\,\mu+1} = t_{i_\varrho\,\mu+1} + z_{i_{v(i_\varrho,\mu+1)}\,\mu+1} + r_{i_\varrho\,\mu+1}$$ wird,

setzen wir $l_{\mu}' = 1$, $v' = \mu+1$; andernfalls betrachten wir (3) .

(3) Wir setzen $l_{\mu}' = \lambda_\mu$, wobei

$$\lambda_\mu = \min\{\lambda \,/\, i_\lambda \in \mathfrak{M}_{\mu+1}\} \quad ;$$

$$z_{i_\varrho\,\mu+1} = t_{i_\varrho\,\mu+1} + z_{i_{v(i_\varrho,\mu+1)}\,\mu+1} + r_{i_\varrho\,\mu+1} \,,$$

für alle $\varrho \in \{\lambda+1,..,l_{\mu+1}'\}$ mit $i_\varrho \in \mathfrak{M}_{\mu+1}$ $\}$

ist, und führen die Konstruktion der Indizes $l_{\mu-1}',..,l_{v'-1}'$ fort.

Aus der Konstruktion von v' und $(l_{v'-1}',..,l_n')$ ist ersichtlich, daß

$(l_{v'-1}',\dots,l_n') \in L_{v',n,m}$ ist.

Vereinbaren wir für alle $z_{i_\lambda\,\mu}$ mit $i_\lambda \notin \mathfrak{M}_\mu$, daß

$z_{i_\lambda\,\mu} = z_{i_\lambda\,\mu-1}$, falls $\lambda = l_{\mu}'$ ist,

und

$z_{i_\lambda\,\mu} = z_{i_{\lambda-1}\,\mu}$, falls $l_{\mu-1}' < \lambda < l_{\mu}'$ ist,

sind, so folgt weiterhin aus der Konstruktion von $(l_{v'-1}',..,l_n')$, daß $z_{i_{l_n'}\,n} = {}^{*}f_1(p)$ gilt, und $z_{i_{l_n'}\,n}$ eine Lösung des Gleichungssystems

$$z_{i_o\,v'} = t_{v'} \quad ,$$

$$z_{i_\lambda\,v'} = t_{i_\lambda v'} + z_{i_{\lambda-1}v'} + r_{i_\lambda v'} \,, \text{ für } l_{v'-1}' \le \lambda \le l_{v'}' \,;$$

$$z_{i_\lambda\,\mu} = t_{i_\lambda\,\mu} + z_{i_\lambda\mu-1} + f_{i_\lambda\,\mu-1} \quad , \text{ für } \lambda = l_{\mu-1}' \,,$$

$$z_{i_\lambda\,\mu} = t_{i_\lambda\,\mu} + z_{i_{\lambda-1}\,\mu} + r_{i_\lambda\,\mu} \,, \text{ für } l_{\mu-1}' < \lambda \le l_{\mu}' \,,$$

$(\mu = v'+1,\dots,n)$, (3.3.13)

ist. Da auch $\mathfrak{W}(v',(l_{v'-1}',..,l_n'))$ eine Lösung von (3.3.13) ist, erhalten wir

$${}^{*}f_1(p) = \mathfrak{W}(v', (l_{v'-1}',..,l_n')) \quad . \tag{3.3.14}$$

Mit (3.3.11) und (3.3.14) folgt die Gültigkeit der Behauptung.

Im nachfolgenden Satz 3.3.2 wird eine weitere Darstellung für $^{\bullet}f_1(p)$ angegeben.

Satz 3.3.2 : Es sei $p \in S$ beliebig. Für $^{\bullet}f_1(p)$ gilt :

$$^{\bullet}f_1(p) = \max_{K_{n,m}} \Big\{ t_{k_o} + \sum_{\varrho=1}^{m} \Big(\sum_{\mu=k_{\varrho-1}}^{k_\varrho} (t_{i_\varrho \mu} + f_{i_\varrho \mu}) + r_{i_\varrho k_{\varrho-1}} - f_{i_\varrho k_\varrho} \Big) \Big\} \quad . \tag{3.3.15}$$

Beweis : Die Maximierungsglieder auf der rechten Seite von (3.3.15) haben die Gestalt

$$\mathfrak{W}(k_o,..,k_m) = t_{k_o} + \sum_{\varrho=1}^{m} \Big(\sum_{\mu=k_{\varrho-1}}^{k_\varrho} (t_{i_\varrho \mu} + f_{i_\varrho \mu}) + r_{i_\varrho k_{\varrho-1}} - f_{i_\varrho k} \Big) \quad , \tag{3.3.16}$$

wobei $(k_o,..,k_m) \in K_{n,m}$ ist. Für einen beliebig gewählten Punkt $(k_o,..,k_m) \in K_{n,m}$ definieren wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
&z'_{i_o\, k_o} = z_{i_o\, k_o} \quad ; \\
&z'_{i_\lambda \mu} = t_{i_\lambda \mu} + z'_{i_{\lambda-1} \mu} + r_{i_\lambda \mu} \quad , \text{ für } \mu = k_{\lambda-1} \quad , \\
&z'_{i_\lambda \mu} = t_{i_\lambda \mu} + z'_{i_\lambda \mu-1} + f_{i_\lambda \mu-1} \quad , \text{ für } k_{\lambda-1} < \mu \leq k_\lambda \quad , \\
&(\lambda = 1,\ldots,m) \quad .
\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

Als Lösung für $z'_{i_m\, k_m}$ erhalten wir aus (3.3.17)

$$z'_{i_m\, k_m} = \mathfrak{W}(k_o,..,k_m) \quad . \tag{3.3.18}$$

Entsprechend den im Kapitel 2 durch die Bedingungen 2,6 und 7 formulierten Vereinbarungen gilt für alle $z'_{i_\lambda \mu}$ mit $\mu \notin \mathfrak{A}_{i_\lambda}$:

$$z'_{i_\lambda \mu} = z'_{i_{\lambda-1} \mu} \quad , \text{ falls } \mu = k_{\lambda-1} \text{ ist,} \tag{3.3.19}$$

und

$$z'_{i_\lambda \mu} = z'_{i_\lambda \mu-1} \quad , \text{ falls } k_{\lambda-1} < \mu < k_\lambda \text{ ist.} \tag{3.3.20}$$

Demnach kann man für (3.3.17) schreiben

$$z'_{i_o k_o} = z_{i_o k_o} \quad ;$$

$$z'_{i_\lambda \mu} = t_{i_\lambda \mu} + z'_{i_{v(i_\lambda,\mu)} \mu} + r_{i_\lambda \mu} \text{ , falls } \mu = k_{\lambda-1} \text{ ist,}$$

$$z'_{i_\lambda \mu} = t_{i_\lambda \mu} + z'_{i_\lambda w(\mu,i_\lambda)} + f_{i_\lambda w(\mu,i_\lambda)} \text{ , falls } k_{\lambda-1} < \mu \leq k_\lambda \text{ ,}$$

für $\lambda = 1,..,m$ und $i_\lambda \in \mathfrak{M}_\mu$. (3.3.21)

Vergleicht man die Größen $z'_{i_\lambda \mu}$ auf der linken Seite der Gleichungen in (3.3.21) mit den entsprechenden Ausdrücken $z_{i_\lambda \mu}$ aus (3.2.3) , so stellen wir fest :

$$z'_{i_\lambda \mu} \leq z_{i_\lambda \mu} \quad .$$

Da $z'_{i_m k_m} = z'_{i_{\bar{I}(k_m)} k_m}$ ist, ergibt sich mit (3.3.4) und (3.3.18) :

$$\mathfrak{W}(k_o,..,k_m) \leq {}^*f_1(p) \quad .$$

Da $(k_o,..,k_m) \in K_{n,m}$ als beliebig vorausgesetzt wurde, folgt

$${}^*f_1(p) \geq \max_{K_{n,m}} \{ \mathfrak{W}(k_o,..,k_m) \} \quad . \tag{3.3.22}$$

Wir konstruieren nun ein Maximierungsglied $\mathfrak{W}(k'_o,..,k'_m)$, $(k'_o,..,k'_m) \in K_{n,m}$, mit

$${}^*f_1(p) = \mathfrak{W}(k'_o,..,k'_m) \quad .$$

Hierbei gehen wir von der durch (3.2.3), (3.2.4), (3.1.11) und (3.1.13) gegebenen rekursiven Beschreibung von ${}^*f_1(p)$ aus. Es sei

$${}^*f_1(p) = z_{i_{\bar{I}(k^*)} k^*} \quad . \tag{3.3.23}$$

Wir setzen $k'_\lambda = k^*$, $\lambda = \bar{I}(k^*),..,m$. Die Konstruktion der k'_λ , $\lambda = 0,...,\bar{I}(k^*)-1$, wobei zuerst $k'_{\bar{I}(k^*)-1}$ gebildet wird, verläuft wie folgt :

(1) Falls

$$z_{i_{\lambda+1} k'_{\lambda+1}} = t_{i_{\lambda+1} k'_{\lambda+1}} + z_{i_{v(i_{\lambda+1},k'_{\lambda+1})} k'_{\lambda+1}} + r_{i_{\lambda+1} k'_{\lambda+1}}$$

ist, betrachten wir (2) ; andernfalls (3) . (3.3.24)

(2) Es sei in (3.3.24) $v(i_{\lambda+1},k'_{\lambda+1}) = \lambda^*$. Wir setzen

$k_r^{\cdot} = k_{\lambda+1}^{\cdot}$, $r = \lambda^*, \ldots, \lambda$.

Falls $\lambda^* = 0$ ist, so sind die $k_\lambda^{\cdot}$ bestimmt, andernfalls setzen wir die Konstruktion der $k_{\lambda^*-1}^{\cdot}, \ldots, k_o$ fort.

(3) Wir setzen $k_\lambda^{\cdot} = \mu_\lambda$, wobei

$\mu_\lambda = \min \{ \mu \,/\, \mu \in \mathfrak{A}_{i_{\lambda+1}} \}$;

$$z_{i_{\lambda+1}\varrho} = t_{i_{\lambda+1}\varrho} + z_{i_{\lambda+1}w(\varrho,i_{\lambda+1})} + f_{i_{\lambda+1}w(\varrho,i_{\lambda+1})} ,$$

für alle $\varrho \in \{\mu+1, \ldots, k_{\lambda+1}^{\cdot}\}$ mit $\varrho \in \mathfrak{A}_{i_{\lambda+1}}$ }

ist.

Für $z_{i_{\lambda+1}k_\lambda^{\cdot}}$ gilt :

$$z_{i_{\lambda+1}k_\lambda^{\cdot}} = t_{i_{\lambda+1}k_\lambda^{\cdot}} + z_{i_{v(i_{\lambda+1},k_\lambda^{\cdot})}k_\lambda^{\cdot}} + r_{i_{\lambda+1}k_\lambda^{\cdot}} . \qquad (3.3.25)$$

Wir setzen weiterhin $k_r^{\cdot} = k_\lambda^{\cdot}$, $r = \lambda', \ldots, \lambda - 1$, wobei in (3.3.25) $v(i_{\lambda+1}, k_\lambda^{\cdot}) = i_{\lambda'}$ ist. Falls $\lambda' = 0$ ist, sind die $k_\lambda^{\cdot}$ bestimmt, andernfalls setzen wir die Konstruktion der $k_{\lambda'-1}^{\cdot}, \ldots, k_o$ fort.

Aus der Konstruktion von $(k_o^{\cdot}, \ldots, k_m^{\cdot})$ folgt, daß $(k_o^{\cdot}, \ldots, k_m^{\cdot}) \in K_{n,m}$ ist. Vereinbaren wir für alle $z_{i_\lambda \mu}$ mit $\mu \notin \mathfrak{A}_{i_\lambda}$, daß sie durch

$z_{i_\lambda \mu} = z_{i_{\lambda-1}\mu}$, falls $\mu = k_{\lambda-1}^{\cdot}$ ist,

und

$z_{i_\lambda \mu} = z_{i_\lambda \mu-1}$, falls $k_{\lambda-1}^{\cdot} < \mu < k_\lambda^{\cdot}$ ist,

definiert sind, so folgt weiterhin aus der Konstruktion von $(k_o^{\cdot}, \ldots, k_m^{\cdot})$:

$z_{i_m k_m^{\cdot}} = {}^{\bullet}f_1(p)$; (3.3.26)

$z_{i_m k_m^{\cdot}}$ ist eine Lösung des Gleichungssystems

$z_{i_\lambda \mu} = t_{i_\lambda \mu} + z_{i_{\lambda-1}\mu} + r_{i_\lambda \mu}$, für $\mu = k_{\lambda-1}^{\cdot}$,

$z_{i_\lambda \mu} = t_{i_\lambda \mu} + z_{i_\lambda \mu-1} + f_{i_\lambda \mu-1}$, für $k_{\lambda-1}^{\cdot} < \mu \leq k_\lambda^{\cdot}$,

$\lambda = 1, \ldots, m$ und $z_{i_o k_o^{\cdot}} = t_{k_o^{\cdot}}$.

Da $\mathfrak{W}(k_o^{\wedge},\ldots,k_m^{\wedge})$ ebenfalls eine Lösung dieses Gleichungssystems ist, erhalten wir aus (3.3.26)

$^{\bullet}f_1(p) = \mathfrak{W}(k_o^{\wedge},\ldots,k_m^{\wedge})$, woraus mit (3.3.22) die Gültigkeit der Beziehung (3.3.15) folgt.

Satz 3.3.3 : Es sei $p \in S$ beliebig. Für $^{\bullet}f_2(p)$ gilt :

$$^{\bullet}f_2(p) = \max_{Q_{n,m}} \Big\{ t_{k_o} + \sum_{\varrho=1}^{m} \Big(\sum_{\mu=1}^{k_\varrho} (t_{i_\varrho \mu} + f_{i_\varrho \mu}) - \sum_{\mu=1}^{k_{\varrho-1}-1} (t_{i_\varrho \mu} + f_{i_\varrho \mu}) + r_{i_\varrho\, k_{\varrho-1}} - f_{i_\varrho\, k_\varrho} \Big) \Big\} . \tag{3.3.27}$$

Beweis : Die Maximierungsglieder auf der rechten Seite von (3.3.27) haben die Form

$$\mathfrak{W}(k_o,..,k_m) = t_{k_o} + \sum_{\varrho=1}^{m} \Big(\sum_{\mu=1}^{k_\varrho} (t_{i_\varrho \mu} + f_{i_\varrho \mu}) - \sum_{\mu=1}^{k_{\varrho-1}-1} (t_{i_\varrho \mu} + f_{i_\varrho \mu}) + r_{i_\varrho k_{\varrho-1}} - f_{i_\varrho k_\varrho} \Big) ,$$

wobei $(k_o,..,k_m) \in Q_{n,m}$ ist. (3.3.28)

Es sei $(k_o,..,k_m) \in Q_{n,m}$ beliebig, aber festgewählt. Zu diesem Punkt definieren wir das Gleichungssystem

$$z'_{i_o\, k_o} = z_{i_o\, k_o} \quad ;$$

$$z'_{i_\lambda\, k_\lambda} = z'_{i_{\lambda-1}\, k_{\lambda-1}} + r_{i_\lambda\, k_{\lambda-1}} - f_{i_\lambda\, k_\lambda} + \sum_{\mu=1}^{k_\lambda} (t_{i_\lambda \mu} + f_{i_\lambda \mu}) - \sum_{\mu=1}^{k_{\lambda-1}-1} (t_{i_\lambda \mu} + f_{i_\lambda \mu}) ,$$

$\lambda = 1,\ldots,m$. (3.3.29)

Aus (3.3.29) ergibt sich als Lösung für $z'_{i_m\, k_m}$:

$$z'_{i_m\, k_m} = \mathfrak{W}(k_o,\ldots,k_m) . \tag{3.3.30}$$

Für alle $z'_{i_\lambda\, k_\lambda}$ mit $k_\lambda \notin \mathcal{A}_{i_\lambda}$ gilt

$$z'_{i_\lambda\, k_\lambda} = z'_{i_{\lambda-1}\, k_{\lambda-1}}$$

(entsprechend der Definition (3.1.9) von $Q_{n,m}$ sind in diesem Fall $k_\lambda = k_{\lambda-1} = \ldots = k_{v(i_\lambda,k_\lambda)}$).

Danach können wir für (3.3.29) schreiben

$$z'_{i_o\, k_o} = z_{i_o\, k_o} \quad ;$$

$$z'_{i_\lambda\, k_\lambda} = z'_{i_{v(i_\lambda,k_\lambda)}\, k_{v(i_\lambda,k_\lambda)}} + r_{i_\lambda\, k_{v(i_\lambda,k_\lambda)}} - f_{i_\lambda\, k_\lambda} + \sum_{\mu=1}^{k_\lambda} (t_{i_\lambda \mu} + f_{i_\lambda \mu}) - \sum_{\mu=1}^{k_{v(i_\lambda,k_\lambda)}-1} (t_{i_\lambda \mu} + f_{i_\lambda \mu}) \quad ,$$

$\lambda = 1,..,m$ und $i_\lambda \in \mathfrak{M}_{k_\lambda}$. (3.3.31)

Für $z'_{i_m\, k_m}$ ergibt sich

$$z'_{i_m\, k_m} = z'_{i_{I(k_m)}\, k_m} \quad . \tag{3.3.32}$$

Nach (3.2.9) ist

$$z'_{i_\lambda\, k_\lambda} \quad z_{i_\lambda\, k_\lambda} \quad ,$$

$\lambda = 1,..,m$ und $i_\lambda \in \mathfrak{M}_{k_\lambda}$. Hieraus folgt mit (3.2.11)

$$z'_{i_m\, k_m} = \mathfrak{W}(k_o,..,k_m) \leqq {}^{\bullet}f_2(p) \tag{3.3.33}$$

bzw.

$${}^{\bullet}f_2(p) \geqq \max_{Q_{n,m}} \{ \mathfrak{W}(k_o,..,k_m) \} \quad , \tag{3.3.34}$$

da (3.3.33) für beliebiges $(k_o,..,k_m) \in Q_{n,m}$ richtig ist.

Wir betrachten nun die rekursive Beschreibung von ${}^{\bullet}f_2(p)$.

Es sei

$${}^{\bullet}f_2(p) = z_{i_{l^\bullet}\, k_{\beta_{i_{l^\bullet}}}(i_{l^\bullet})} \quad .$$

Wir setzen $k^\bullet_\lambda = k_{\beta_{i_{l^\bullet}}}(i_{l^\bullet})$, $\lambda = l^\bullet,\ldots,m$. Nach (3.2.9) gibt es

einen Index $k_{l^\bullet-1} \in \mathcal{A}_{i_{l^\bullet}}$ mit

$$z_{i_{l^*},k^*_{l^*}} = z_{i_{l'},k^*_{l'-1}} + r_{i_{l^*},k^*_{l^*-1}} - f_{i_{l^*},k^*_{l^*}}$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{k^*_{l^*}} (t_{i_{l^*},\mu} + f_{i_{l^*},\mu}) - \sum_{\mu=1}^{k^*_{l^*-1}-1} (t_{i_{l^*},\mu} + f_{i_{l^*},\mu}) \quad ,$$

wobei $l' = v(i_{l^*}, k^*_{l^*-1})$ ist.

Falls $l' > 0$ ist, bilden wir $k^*_\lambda = k^*_{l^*-1}$, $\lambda = l', .., l^*-1$, und setzen die Rekursion für $z_{i_{l'},k^*_{l'}}$ fort. Andernfalls legen wir $k^*_0 = k^*_{l^*-1}$ fest.

Wir stellen fest, daß für den so konstruierten Punkt $(k^*_0,..,k^*_m)$ gilt

$$(k^*_0,..,k^*_m) \in Q_{n,m} \quad ,$$

$$\mathcal{W}(k^*_0,..,k^*_m) = z_{i_{l^*},k_{\beta_{i_{l^*}}}(i_{l^*})} = {}^*f_2(p) \quad .$$

Mit (3.3.34) folgt hieraus die Behauptung (3.3.27) .

Satz 3.3.4 : Es sei $p \in S$ beliebig. Für ${}^*f_3(p)$ gilt

$${}^*f_3(p) = \max_{1\le v\le n} \Big\{ \max_{H_{v,n,m}} \Big\{ t_v + \sum_{\mu=v}^{n} \Big(\sum_{\lambda=1}^{l_\mu} (t_{i_\lambda,\mu} + r_{i_\lambda,\mu})$$

$$- \sum_{\lambda=1}^{l_\mu-1} (t_{i_\lambda,\mu} + r_{i_\lambda,\mu}) \Big) + \sum_{\mu=v}^{n-1} (f_{i_{l_\mu},\mu} - r_{i_{l_\mu},\mu+1}) \Big\} \quad .$$

Den Beweis führt man analog zum Beweis von Satz 3.3.1 durch entsprechende Modifikationen (vgl. die Modifikation vom Beweis zum Satz 3.3.2 , um den Satz 3.3.3 zu beweisen).

Da die Probleme $\overline{\text{RFP}}$*s , s= 1,2,3 , Spezialfälle der Reihenfolgeprobleme RFP*s , s= 1,2,3 , darstellen, ist klar, daß wir analytische Darstellungen für ${}^*\bar{f}_s(p)$, s= 1,2,3 , aus den Darstellungen von ${}^*f_s(p)$ ableiten können.

Für die Reihenfolgeprobleme "ohne Überspringen" haben wir

$$\mathcal{M}_k = \{1,2,..,m\} \quad , \quad k= 1,...,n \quad ,$$

und

$$\mathcal{A}_i = \{1,2,..,n\} \quad , \quad i= 1,...,m \quad .$$

Daher sind für jede Reihenfolge $p \in S$ die Bedingungen

$$k_o \in \bigcup_{r=1}^{m} \mathcal{A}_{i_r} \quad \text{und} \quad k_r \in \mathcal{A}_{i_r}(k_{r-1}) \quad , \; r= 1,...,m \quad ,$$

in (3.1.7) und (3.1.9) den Bedingungen

$$1 \leq k_r \leq n \quad , \; r= 0,...,m \quad ,$$

äquivalent.

Für jedes $p \in S$ sind die Bedingungen

$$i_{l_v} \in \mathcal{M}_v \quad \text{und} \quad i_{l_j} \in \mathcal{M}_j(l_{j-1}) \quad , \; j= v+1,...,n \quad ,$$

in (3.1.3) und (3.1.1) den Bedingungen

$$1 \leq l_j \leq m \quad , \; j= v,...,n \quad ,$$

äquivalent.

Betrachten wir nun die Maximierungsglieder in den Darstellungen von $^{\bullet}f_s(p)$, $s= 1,2,3$, und beachten, daß die Bearbeitungs-, Rüst- und Transportzeiten als nichtnegativ vorausgesetzt sind, so ersehen wir, daß l_n durch $l_n=m$ und k_m durch $k_m=n$ festgesetzt werden können.

Damit haben wir für eine beliebige Reihenfolge $p \in S$

$$^{\bullet}f_1(p) = \max_{1 \leq v \leq n} \left\{ \max_{\bar{L}_{v,n,m}} \left\{ t_v + \sum_{\mu=v}^{n} \sum_{\lambda=l_{\mu-1}}^{l_\mu} \left(t_{i_\lambda \mu} + r_{i_\lambda \mu} \right) \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{\mu=v}^{n-1} \left(f_{i_{l_\mu} \mu} - r_{i_{l_\mu} \mu+1} \right) \right\} \right\} \qquad (3.3.36)$$

$$= \max_{\bar{K}_{n,m}} \left\{ t_{k_o} + \sum_{\varrho=1}^{m} \left(\sum_{\mu=k_{\varrho-1}}^{k_\varrho} \left(t_{i_\varrho \mu} + f_{i_\varrho \mu} \right) \right. \right.$$

$$\left. \left. + r_{i_\varrho k_{\varrho-1}} - f_{i_\varrho k_\varrho} \right) \right\} \quad , \qquad (3.3.37)$$

$$
{}^{*}\overline{F}_2(p) = \max_{\overline{Q}_{n,m}} \Big\{ t_{k_0} + \sum_{\varrho=1}^{m} \Big(\sum_{\mu=1}^{k_\varrho} (t_{i_\varrho \mu} + f_{i_\varrho \mu}) - \sum_{\mu=1}^{k_{\varrho-1}-1} (t_{i_\varrho \mu} + f_{i_\varrho \mu}) + r_{i_\varrho k_{\varrho-1}} - f_{i_\varrho k_\varrho} \Big) \Big\}, \tag{3.3.38}
$$

$$
{}^{*}\overline{F}_3(p) = \max_{1 \le v \le n} \Big\{ \max_{\overline{H}_{v,n,m}} \Big\{ t_v + \sum_{\mu=v}^{n} \Big(\sum_{\lambda=1}^{l_\mu} (t_{i_\lambda \mu} + r_{i_\lambda \mu}) - \sum_{\lambda=1}^{l_{\mu-1}-1} (t_{i_\lambda \mu} + r_{i_\lambda \mu}) \Big) + \sum_{\mu=v}^{n-1} (f_{i_{l_\mu} \mu} - r_{i_{l_\mu} \mu+1}) \Big\} \Big\}, \tag{3.3.39}
$$

wobei die Mengen $\overline{L}_{v,n,m}$, $\overline{K}_{n,m}$, $\overline{Q}_{n,m}$ und $\overline{H}_{v,n,m}$ in (3.1.4), (3.1.8), (3.1.10) und (3.1.6) definiert sind.

Analytische Darstellungen für die Zielgrößen der Probleme mit reihenfolgeabhängigen Rüstzeiten $f_s(p)$ und $\overline{F}_s(p)$, s=1,2,3, erhalten wir, wenn die konstanten Rüstzeiten $r_{i_\alpha k}$ in den Darstellungen für ${}^{*}f_s(p)$ und ${}^{*}\overline{F}_s(p)$ durch die reihenfolgeabhängigen Rüstzeiten $r_{i_{v(i_\alpha,k)}\, i_\alpha k}$ bzw. $r_{i_{\alpha-1}\, i_\alpha k}$ ersetzt werden. Hierzu ist zu bemerken, daß bei vorgegebener Permutation $p \in S$ diese (reihenfolgeabhängigen) Rüstzeiten für jeden Auftrag A_{i_α} und jede Maschine M_k (α=1,..,m , k=1,..,n) festgelegt sind (vgl. Bedingung 6.2 in Kapitel 2).

Folgerung 3.3 : Es sei $p \in S$ beliebig festgewählt. Man überzeugt sich leicht davon, daß aus den Darstellungen der Zielfunktionen für die Probleme, bei denen Wartezeiten der Aufträge bzw. Stillstandszeiten der Maschinen verboten sind, die Darstellungen der Zielfunktionen für die Reihenfolgeprobleme, bei denen sowohl Wartezeiten der Aufträge als auch Stillstandszeiten der Maschinen zugelassen sind, entstehen, wenn in den (jeweiligen) Darstellungen $Q_{n,m}$ durch $K_{n,m}$ und $\overline{Q}_{n,m}$ durch $\overline{K}_{n,m}$ bzw. $H_{v,n,m}$ durch $L_{v,n,m}$ und $\overline{H}_{v,n,m}$ durch $\overline{L}_{v,n,m}$ ersetzt werden. Da auf Grund der Definitionen dieser Mengen die Inklusionen

$$
L_{v,n,m} \subseteq H_{v,n,m}, \quad \overline{L}_{v,n,m} \subseteq \overline{H}_{v,n,m}, \quad K_{n,m} \subseteq Q_{n,m} \text{ und } \overline{K}_{n,m} \subseteq \overline{Q}_{n,m}
$$

gelten, folgt aus den obigen Darstellungen der Zielfunktionen

$$f_3(p) \geq f_1(p) \quad , \quad {}^{\bullet}f_3(p) \geq {}^{\bullet}f_1(p) \quad , \tag{3.3.40}$$

$$\overline{f}_3(p) \geq \overline{f}_1(p) \quad , \quad {}^{\bullet}\overline{f}_3(p) \geq {}^{\bullet}\overline{f}_1(p) \quad , \tag{3.3.41}$$

$$f_2(p) \geq f_1(p) \quad , \quad {}^{\bullet}f_2(p) \geq {}^{\bullet}f_1(p) \quad ,$$

$$\overline{f}_2(p) \geq \overline{f}_1(p) \quad , \quad {}^{\bullet}\overline{f}_2(p) \geq {}^{\bullet}\overline{f}_1(p) \quad .$$

Falls n = 2 ist, sind

$$H_{v,n,m} = L_{v,n,m} \quad \text{und} \quad \overline{H}_{v,n,m} = \overline{L}_{v,n,m} \quad .$$

Demnach kann für n = 2 in (3.3.40) und (3.3.41) das Ungleichheitszeichen durch das Gleichheitszeichen ersetzt werden.

3.4 Der Zusammenhang zwischen den Reihenfolgeproblemen $\overline{RFP}$ 2 und $\overline{RFP}^{\bullet}2$ und dem Rundreiseproblem

Wir definieren im folgenden "Distanzmatrizen" für das Rundreiseproblem durch

$${}^{\bullet}d_{o\,i} = \max_{1\leq k\leq n} \Big\{ t_k + r_{i\,k} + \sum_{\mu=k}^{n-1} f_{i\,\mu} + \sum_{\mu=k}^{n} t_{i\,\mu} \Big\} \quad , \tag{3.4.1}$$

$$\overline{d}_{o\,i} = \max_{1\leq k\leq n} \Big\{ t_k + r_{i_o\,i\,k} + \sum_{\mu=k}^{n-1} f_{i\,\mu} + \sum_{\mu=k}^{n} t_{i\,\mu} \Big\}, \tag{3.4.2}$$

$i=1,..,m$;

$${}^{\bullet}d_{j\,i} = \max_{1\leq k\leq n} \Big\{ r_{i\,k} + \sum_{\mu=k}^{n} (t_{i\,\mu} - t_{j\,\mu}) + \sum_{\mu=k}^{n-1} (f_{i\,\mu} - f_{j\,\mu}) \Big\}, \tag{3.4.3}$$

$$\overline{d}_{j\,i} = \max_{1\leq k\leq n} \Big\{ r_{j\,i\,k} + \sum_{\mu=k}^{n} (t_{i\,\mu} - t_{j\,\mu}) + \sum_{\mu=k}^{n-1} (f_{i\,\mu} - f_{j\,\mu}) \Big\} \quad , \tag{3.4.4}$$

$i,j = 1,..,m$ und $i \neq j$;

$${}^{\bullet}d_{i\,o} = \overline{d}_{i\,o} = 0, \quad i=1,..,m \quad . \tag{3.4.5}$$

Wir bestimmen für alle Indexpaare i, j mit $i \neq j$ und $i,j \in \{1,..,m\}$, die Größen $^{\bullet}\bar{d}_{i\,j}$ bzw. $\bar{d}_{i\,j}$ und für $i=1,..,m$ die Größen $^{\bullet}\bar{d}_{o\,i}$ bzw. $\bar{d}_{o\,i}$.
Damit erhalten wir eine "Distanzmatrix" $^{\bullet}\bar{D} = (\,^{\bullet}\bar{d}_{i\,j})_{m+1,m+1}$ bzw. $\bar{D} = (\,\bar{d}_{i\,j})_{m+1,m+1}$, wobei allerdings die Diagonalelemente von $^{\bullet}\bar{D}$ und $\bar{D}$ nicht definiert sind.

Nach (3.2.25), (3.2.27) und (3.2.28) können wir mit den obigen Bezeichnungen für $^{\bullet}\bar{f}_2(p)$ und $\bar{f}_2(p)$, $p \in S$, schreiben

$$^{\bullet}\bar{f}_2(p) = \sum_{s=1}^{m} {}^{\bullet}\bar{d}_{i_{s-1}\,i_s} \quad , \quad i_o = 0 \quad , \tag{3.4.6}$$

$$\bar{f}_2(p) = \sum_{s=1}^{m} \bar{d}_{i_{s-1}\,i_s} \quad , \quad i_o = 0 \quad . \tag{3.4.7}$$

Um $^{\bullet}\bar{f}_2(p)$ bzw. $\bar{f}_2(p)$, $p \in S$, zu minimieren, kann das Rundreiseproblem für die "Distanzmatrix" $^{\bullet}\bar{D}$ bzw. $\bar{D}$ gelöst werden.
Wenn
$$(\tilde{i}_o,\tilde{i}_1),(\tilde{i}_1,\tilde{i}_2),..,(\tilde{i}_{r-1},\tilde{i}_r),(\tilde{i}_r,\tilde{i}_{r+1}),..,(\tilde{i}_m,\tilde{i}_o)$$
eine optimale Rundreise des durch $^{\bullet}\bar{D}$ bzw. $\bar{D}$ gegebenen Rundreiseproblems und $\tilde{i}_r = 0$ sind, so liefert (vgl. [31] , [34])
$$\bar{p} = (\,\tilde{i}_{r+1},..,\,\tilde{i}_m,\,\tilde{i}_o,..,\,\tilde{i}_{r-1})$$
eine optimale Lösung des Problems $\overline{RFP}^{\bullet}2$ bzw. $\overline{RFP}\ 2$.
Für $^{\bullet}\bar{f}_2(\bar{p})$ bzw. $\bar{f}_2(\bar{p})$ gilt

$$^{\bullet}\bar{f}_2(\bar{p}) = \sum_{s=1}^{m+1} {}^{\bullet}\bar{d}_{\tilde{i}_{s-1}\,\tilde{i}_s} \quad , \quad \tilde{i}_{m+1} = \tilde{i}_o \quad ,$$

bzw.

$$\bar{f}_2(\bar{p}) = \sum_{s=1}^{m+1} \bar{d}_{\tilde{i}_{s-1}\,\tilde{i}_s} \quad , \quad \tilde{i}_{m+1} = \tilde{i}_o \quad .$$

4. "Branch and Bound" - eine Konzeption zur Lösung von Reihenfolgeproblemen

Die betrachteten Reihenfolgeprobleme gehören zur Klasse der kombinatorischen Optimierungsprobleme, die sich allgemein folgendermaßen formulieren lassen :

Gegeben ist eine endliche Menge D und jedem $d \in D$ ist eindeutig eine reelle Zahl F(d) zugeordnet. Gesucht ist ein Element $d^* \in D$ (oder auch alle) mit

$$F(d^*) = \min \{ F(d) \;/\; d \in D \} \quad . \qquad (4.1)$$

Bei den Reihenfolgeproblemen sind anstelle von F(d) und der Menge D die (jeweilige) Zielfunktion f(p) und die Menge S der Reihenfolgen zu betrachten.

Zur Lösung kombinatorischer Optimierungsprobleme werden häufig Verfahren der kombinatorischen Analyse herangezogen. Diesen Verfahren liegen die Konzeptionen "Branch and Bound", "begrenzte Enumeration" von Müller - Merbach [30] oder "Erweiterungsprinzip" im Sinne von Schoch [32] zugrunde. Bei diesen Konzeptionen wird vor allem davon ausgegangen, daß die Menge der zulässigen Lösungen D endlich ist. Ihre zentrale Idee besteht darin, möglichst viele Elemente von D auszuschließen.
Von Jaeschke [19] wurde "Branch and Bound" als eine allgemeine Methode zur Lösung kombinatorischer Optimierungsprobleme beschrieben.

Es seien die folgenden Voraussetzungen (vgl. [19]) erfüllt:

V 1 : Jeder (mehrelementigen) Teilmenge $B \subseteq D$ ist eine K l a s s e n z e r l e g u n g K(B) (welche mindestens zwei Klassen enthält) zugeordnet.

V 2 : Jeder Klasse C einer beliebigen Klassenzerlegung K(B) ist eine reelle Zahl U(C) (S c h r a n k e n f u n k t i o n) mit

$$F(d) \geq U(C) \quad \text{für alle } d \in C \quad \text{zugeordnet.} \qquad (4.2)$$

V 3 : Zu einer beliebigen Klassenzerlegung K(D) ist eine A u s w a h l f u n k t i o n A(K(D)) erklärt, die mit-

tels der Werte $U(C)$, $C \in K(D)$, eine Klasse $C^* \in K(D)$ auswählt.

V 4 : Enthält $C \in K(D)$ nur ein Element d , so ist $U(C) = F(d)$.

Die Konzeption "Branch and Bound" baut auf den folgenden Grundgedanken auf :

Der Menge der zulässigen Lösungen D wird stufenweise eine Klassenzerlegung $K^r(D)$ zugeordnet.
Für jede Klasse $C_\mu^r \in K^r(D)$ wird eine untere Schranke $U(C_\mu^r)$ berechnet.
Falls $K^r(D)$ eine einelementige Klasse $C_{\mu^*}^r = \{d^*\}$ enthält und

$$U(d^*) \leq \min \{ U(C_\mu^r) \ / \ C_\mu^r \in K^r(D) \} \qquad (4.3)$$

ist, so ist d^* eine optimale Lösung, d.h. für d^* ist (4.1) erfüllt. Andernfalls wird durch $A(K^r(D))$ unter Verwendung der Werte $U(C_\mu^r)$ aus den Klassen $C_\mu^r \in K^r(D)$ eine Klasse $C_{\mu^*}^r$ ausgezeichnet, welche durch $K(C_{\mu^*}^r)$ ersetzt wird, d.h. es wird

$$K^{r+1}(D) = \{ C_\mu^{r+1} \ / \ C_\mu^{r+1} \in K^r(D) \cup K(C_{\mu^*}^r) \ , \ C_\mu^{r+1} \neq C_{\mu^*}^r \}$$

gesetzt.
Wir wollen vereinbaren, daß, falls durch A eine einelementige Klasse $C_{\mu^*}^r$ ausgewählt wird, das Element $d^* \in C_{\mu^*}^r$ eine optimale Lösung ist.

Es sei darauf hingewiesen, daß im allgemeinen eine einelementige Klasse $C_{\mu^*}^r \in K^r(D)$, deren Element eine optimale Lösung ist, nicht gleich als eine solche erkannt werden braucht (bzw. durch A ausgewählt wird), da $K^r(D)$ (mehrelementige) Klassen C_i^r mit $U(C_i^r) < U(C_{\mu^*}^r)$ enthalten kann. Das Verfahren endet erst dann, wenn die Bedingung (4.3) erfüllt ist.

In Abb. 4.1 ist das allgemeine Arbeitsprinzip von "Branch and Bound" (von welchem in dieser Arbeit ausgegangen wird) dargestellt.

Um "Branch and Bound"- Verfahren zur exakten Lösung der be-

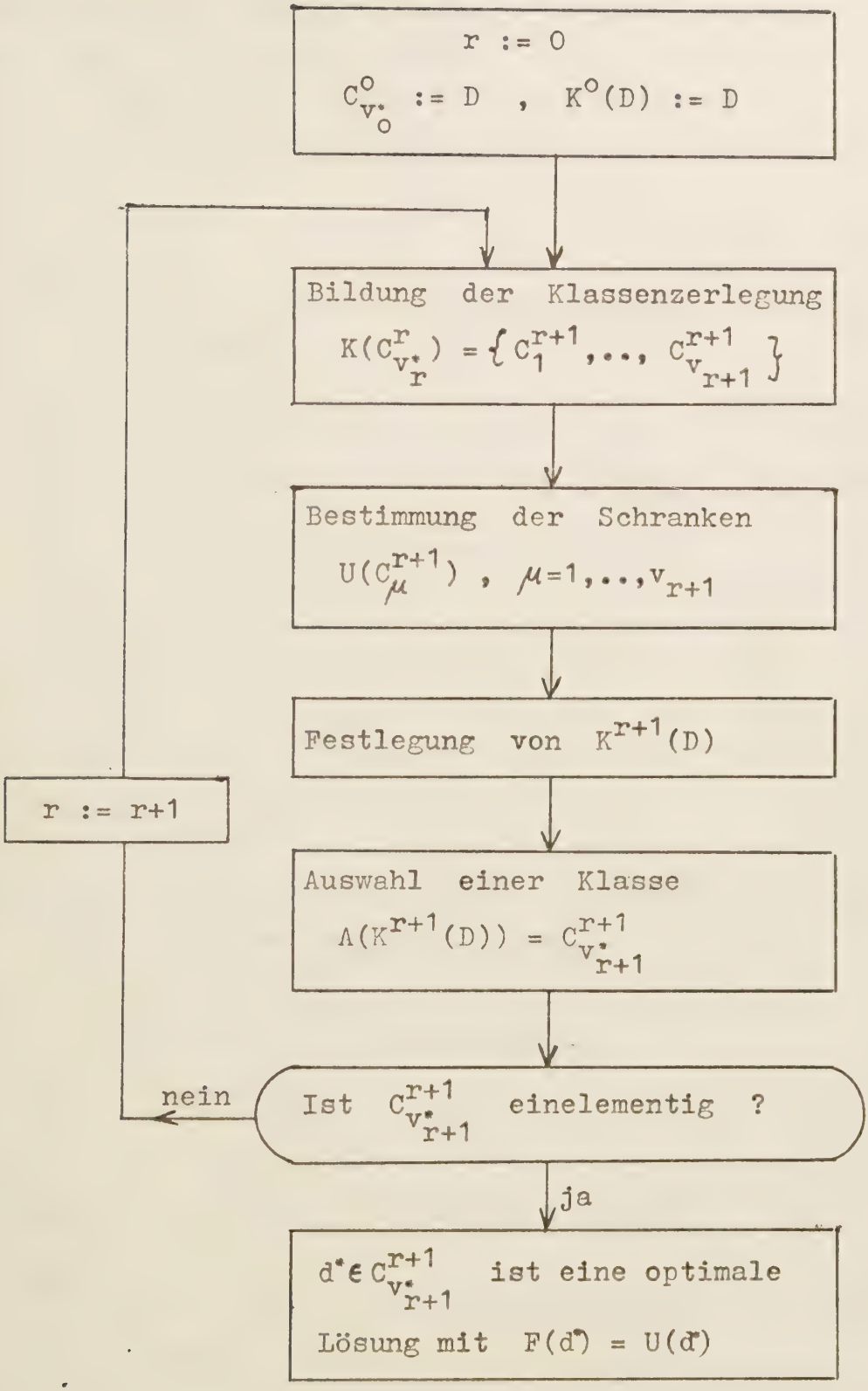


Abbildung 4.1

trachteten RFP´e zu entwickeln, gilt es U ,K und A festzulegen, wobei die Voraussetzungen V 1 bis V 4 zu berücksichtigen sind. Dabei ist zu beachten, daß die Wirksamkeit der entstehenden Verfahren wesentlich von der Wahl von U , K und A abhängt.

Es seien

$S_{i_m;}$ eine Klasse von Permutationen $p \in S$ mit fixiertem letztem Element i_m ;

$S_{i_1,..,i_\lambda}$ und $S_{i_m;i_1,..,i_\lambda}$, $(\lambda = 1,..,m-1)$, Klassen von Permutationen $p \in S$ bzw. $p \in S_{i_m;}$ mit festgelegten Elementen $i_1,...,i_\lambda$;

$$I_\lambda = \{1,...,m\} \setminus \{i_1,..,i_\lambda\} \quad , \quad \lambda = 1,..,m-1 \quad ; \qquad (4.4)$$
$$I_0 = \{1,...,m\} \quad ;$$

$$I_{m,\lambda} = \{1,...,m\} \setminus \{i_m,i_1,..,i_\lambda\} \quad , \lambda = 1,..,m-2 \quad ; \qquad (4.5)$$
$$I_{m,0} = \{1,...,m\} \setminus \{i_m\} \quad .$$

Es werden zwei Möglichkeiten der Klassenzerlegung angegeben.

1. $$K(S) = \{ S_{i_1} \,/\, i_1 \in \{1,...,m\} \} \quad ;$$
$$K(S_{i_1,..,i_\lambda}) = \{ S_{i_1,..,i_\lambda,i_{\lambda+1}} \,/\, i_{\lambda+1} \in I_\lambda \} \quad , \qquad (4.6)$$
$$\lambda = 1,...,m-2 \quad .$$

2. $$K(S) = \{ S_{i_m;} \,/\, i_m \in \{1,...,m\} \} \quad ;$$
$$K(S_{i_m;}) = \{ S_{i_m;i_1} \,/\, i_1 \in \{\{1,..,m\} \setminus \{i_m\}\} \} \quad ; \qquad (4.7)$$
$$K(S_{i_m;i_1,..,i_\lambda}) = \{ S_{i_m;i_1,..,i_\lambda,i_{\lambda+1}} \,/\, i_{\lambda+1} \in I_{m,\lambda} \} \quad ,$$
$$\lambda = 1,..,m-3 \quad .$$

Eine Klassenzerlegung $K^r(S)$ kann also Klassen C_μ^r der Form $S_{i_1,..,i_\lambda}$ bzw. $S_{i_m;}$ und $S_{i_m;i_1,..,i_\lambda}$ enthalten.

Bei den Untersuchungen in dieser Arbeit wird von der ersten Möglichkeit der Klassenzerlegung ausgegangen. Die zweite Mög-

wird im Abschnitt 5.7 betrachtet (in Hinblick auf eine Vereinfachung der Bestimmung unterer Schranken).

Die Auswahlfunktion $A(K^r(S))$ sei wie folgt erklärt :

$$A(K^r(S)) = C^r_{v^*_r} \quad \text{mit}$$

$$U(C^r_{v^*_r}) = \min \{ U(C^r_\mu) \;/\; C^r_\mu \in K^r(S) \} \quad , \qquad (4.8)$$

wobei die Eindeutigkeit bei der Anwendung des jeweiligen Verfahrens noch zu sichern ist.
Entsprechend dieser Definition von A folgt, daß, falls $A(K^r(S)) = C^r_{v^*_r}$ und $C^r_{v^*_r}$ einelementig sind, das Element $p^* \in C^r_{v^*_r}$ eine optimale Lösung ist.

Bei der Konstruktion unterer Schranken kommt es darauf an, den folgenden Forderungen (vgl. [2]) nach Möglichkeit gerecht zu werden :

F 1 : Der Funktionswert f(p) für eine beliebige Permutation $p \in C^r_\mu$ ist möglichst gut zu approximieren.

F 2 : Die unteren Schranken $U(C^r_\mu)$ sollen einfach bestimmbar sein.

Möglichkeiten der Konstruktion unterer Schranken werden im nachfolgenden Kapitel 5 betrachtet.

Für den Ablauf der "Branch and Bound"- Verfahren gilt die folgende Aussage (vgl. [1]) :

Eine optimale Lösung ist frühestens nach der Untersuchung von $\frac{m \cdot (m+1)}{2} - 1$ Klassen gefunden, in ungünstigen Fällen aber erst nach der Betrachtung von $m + m \cdot (m-1) + \ldots + m!$ Klassen.

Bei der Anwendung von "Branch and Bound"- Verfahren zur Lösung von umfangreichen Problemen kann die Anzahl der Klassen der Klassenanlegungen $K^r(S)$ sehr groß werden. Bei der rechentechnischen Realisierung können dadurch erhebliche Schwierigkeiten für die Speicherung der Klassen entstehen. Daher ist es häufig notwendig Modifikationen des in Abb. 4.1 angegebenen allgemeinen Ablaufs zu entwickeln. Von Jaeschke [19] wurden zur Ver-

ringerung der Zahl der zu berücksichtigenden Klassen Eliminationsprinzipien vorgeschlagen. Im Kapitel 6 findet eines dieser Prinzipien Anwendung.

Es sei bemerkt, daß die in dieser Arbeit vorgeschlagenen "Branch and Bound"- Verfahren als Grundlage bzw. Hilfsmittel für die Konzipierung von Näherungsverfahren dienen können. Um das zu verdeutlichen, wird auf einige Möglichkeiten verwiesen.

a) Anstelle von V 4 wird für einelementige Klassen C vereinbart :

$$U(C) = F(d) - KON \quad , d \in C \ ,$$

wobei $KON > 0$ eine Konstante ist.
Durch diese Festlegung wird gesichert, daß die Abweichung des Zielfunktionswertes einer erhaltenen Näherungslösung vom optimalen Zielfunktionswert nicht größer als der Wert dieser Konstante ist.

b) Die Auswahlfunktion wird auf Teilmengen von $K^{r+1}(D)$ eingeschränkt. Eine derartige Variante wird im Kapitel 6 ausgeführt.

c) Mit Hilfe von Näherungsverfahren werden zunächst Anfangslösungen bestimmt. Es wird überprüft, ob durch Vertauschen einer bestimmten Anzahl aufeinanderfolgender Aufträge bessere Lösungen erhalten werden können ("lokale Optimierung"). Wenn $p^* = (i_1^*, .., i_m^*)$ eine Näherungslösung ist, und soll z.B. überprüft werden, ob durch Vertauschung der Aufträge $A_{i_{\lambda+1}^*}, \ldots, A_{i_m^*}$ eine bessere Lösung gefunden werden kann, so kann man dazu "Branch and Bound"- Verfahren heranziehen.

5. Möglichkeiten der Konstruktion unterer Schranken

In diesem Kapitel werden Möglichkeiten der Schrankenbildung angegeben, wobei angestrebt wird, den Forderungen F 1 und F 2 aus Kapitel 4 gerecht zu werden.

5.1 Vorbereitende Betrachtungen

Es sei $S_{i_1,..,i_\lambda}$ eine beliebige Klasse von Permutationen.

Die folgenden Bezeichnungen werden eingeführt :

$\mathcal{M}(I_\lambda)$ ist die Indexmenge der Maschinen $M_1,..,M_n$, auf denen mindestens einer der Aufträge A_i , $i \in I_\lambda$, zu bearbeiten ist, d.h.

$$\mathcal{M}(I_\lambda) = \bigcup_{i \in I_\lambda} \mathcal{M}_i \quad . \tag{5.1.1}$$

$\mathcal{L}(I_\lambda)$ ist die Indexmenge der Maschinen $M_1,..,M_n$, auf denen keiner der Aufträge A_i , $i \in I_\lambda$, zu bearbeiten ist, d.h.

$$\mathcal{L}(I_\lambda) = \{1,..,n\} \setminus \mathcal{M}(I_\lambda) \quad . \tag{5.1.2}$$

Mit $i_{T(k,\lambda)}$ bezeichnen wir den Index des Auftrages, der als letzter der Aufträge $A_{i_1},..,A_{i_\lambda}$ auf der Maschine M_k bearbeitet wird. Falls keiner der Aufträge $A_{i_1},..,A_{i_\lambda}$ auf der Maschine M_k zu bearbeiten ist, vereinbaren wir $i_{T(k,\lambda)} = i_o$.

$S(I_\lambda)$ ist die Menge aller (verschiedenen) Permutationen $p_\lambda = (i_{\lambda+1},..,i_m)$ der Aufräge A_i , $i \in I_\lambda$.

Es sei $g(\, p_\lambda \,/\, y_k \,,\, k \in \mathcal{M}(I_\lambda)\,)$, $p_\lambda \in S(I_\lambda)$, die Gesamtfertigungszeit der Aufträge $A_{i_{\lambda+1}},..,A_{i_m}$ auf den Maschinen M_k , $k \in \mathcal{M}(I_\lambda)$, wobei $y_k \geq 0$ die Kapazitätsbelastung der Maschine M_k ist .

Unter $x_{\lambda\, k}$ verstehen wir den Endzeitpunkt der Bearbeitung des Auftrages $A_{i_{T(k,\lambda)}}$ auf der Maschine M_k , unter der An-

nahme, daß nur die Aufträge $A_{i_1},..,A_{i_\lambda}$ auf den Maschinen M_1 bis M_n zu bearbeiten sind. Falls keiner der Aufträge $A_{i_1},..,A_{i_\lambda}$ auf M_k zu bearbeiten ist, vereinbaren wir $x_{\lambda\, k} = t_k$.

Nach Abschnitt 3.2 können wir die Größen $x_{\lambda\, k}$, $i_{I(k,\lambda)} \neq i_o$, bestimmen, wobei λ anstelle von m zu betrachten ist.

Unter Verwendung der eingeführten Bezeichnungen kann f(p) für beliebige Permutationen $p \in S_{i_1,..,i_\lambda}$ und $p_\lambda = (i_{\lambda+1},..,i_m)$ wie folgt dargestellt werden :

$$f(p) = g(\, p_\lambda \,/\, y_k \,,\ k \in \mathcal{A}(I_\lambda)\,) \ , \text{ falls } \mathcal{S}(I_\lambda) = \phi \text{ ist,} \tag{5.1.3}$$

$$f(p) = \max\Big[\, g(\, p_\lambda \,/\, y_k \,,\ k \in \mathcal{A}(I_\lambda)\,) \ , \max_{k \in \mathcal{S}(I_\lambda)} z_{i_{I(k,\lambda)}\, k}\,\Big] \ , \text{ falls } \mathcal{S}(I_\lambda) \neq \phi \text{ ist ,} \tag{5.1.4}$$

wobei $y_k = z_{i_{I(k,\lambda)}\, k}$, $k \in \mathcal{A}(I_\lambda)$, als (fiktive) Kapazitätsbelastung der Maschine M_k betrachtet wird.

Es erheben sich die Fragen :

1° Wie können wir die Größen $z_{i_{I(k,\lambda)}\, k}$, k=1,..,n , für alle $p \in S_{i_1,..,i_\lambda}$ durch Konstanten y_k nach unten abschätzen ?

2° Wie können wir unter Verwendung der y_k aus 1° , $k \in \mathcal{A}(I_\lambda)$, $g(\, p_\lambda \,/\, y_k \,,\ k \in \mathcal{A}(I_\lambda)\,)$ für alle $p_\lambda \in S(I_\lambda)$ nach unten abschätzen ?

Bei der Beantwortung dieser Fragen gilt es, die Forderungen F 1 und F 2 aus Kapitel 4 zu beachten.

Aus den Betrachtungen im Abschnitt 3.2 (insbesondere Folgerung 3.2) ist ersichtlich :

1. Für die RFP´e , bei denen Stillstandszeiten der Maschinen zugelassen sind, ist

$$z_{i_{I(k,\lambda)}\,k} = x_{\lambda\,k} \quad , k=1,..,n \; , \tag{5.1.5}$$

für alle $p \in S_{i_1,..,i_\lambda}$.

2. Für die RFP´e , bei denen Stillstandszeiten der Maschinen verboten sind, ist

$$z_{i_{I(k,\lambda)}\,k} \geq x_{\lambda\,k} \quad , k=1,..,n \; , \tag{5.1.6}$$

für alle $p \in S_{i_1,..,i_\lambda}$.

3. Für die RFP´e , bei denen das "Überspringen" von Maschinen ausgeschlossen ist, gilt

$$z_{i_{I(k,\lambda)}\,k} = z_{i_\lambda\,k} \quad ,(k=1,..,n), \quad p \in S_{i_1,..,i_\lambda} \; ; \tag{5.1.7}$$

$$z_{i_\lambda\,1} \leq z_{i_\lambda\,2} \leq \cdots \leq z_{i_\lambda\,n} \quad , \quad p \in S_{i_1,..,i_\lambda} \; ; \tag{5.1.8}$$

$$x_{\lambda\,1} \leq x_{\lambda\,2} \leq \cdots \leq x_{\lambda\,n} \quad . \tag{5.1.9}$$

Setzen wir $y_k = x_{\lambda\,k}$, $k=1,..,n$, so haben wir die Frage 1° für alle in der Tabelle 2.1 angegebenen RFP´e beantwortet, wobei für die Probleme, bei denen Stillstanszeiten der Maschinen verboten sind, wegen (5.1.6) diese Frage im Hinblick auf F 1 einer weiteren Erörterung bedarf (vgl. Abschnitt 5.3) .

Man überzeugt sich leicht davon, daß wir für jede in der Tabelle 2.1 angegebene Problemstellung $g(p_\lambda / y_k , k \in \mathcal{A}(I_\lambda))$, $p_\lambda \in S(I_\lambda)$, analog der entsprechenden Zielgröße f(p) darstellen können. Hierauf kann jedoch verzichtet werden. Anstatt die Frage 2° für $g(p_\lambda / y_k , k \in \mathcal{A}(I_\lambda))$ zu beantworten, können wir uns auf ihre Erörterung für f(p) beschränken.

Weiterhin wissen wir nach Folgerung 3.3 , daß die Zielfunktionen $f_2(p)$ und $f_3(p)$, $p \in S$, sich durch $f_1(p)$ nach unten abschätzen lassen. Demnach können untere Abschätzungen von $f_1(p)$ für alle $p \in S$ unmittelbar zur Schrankenbildung für $f_2(p)$

und $f_3(p)$ herangezogen werden (Entsprechendes gilt für die Spezialisierungen der RFP'e RFP 1, RFP 2 und RFP 3).

In den nachfolgenden Abschnitten werden u.a. Schranken betrachtet, zu deren Berechnung es notwendig ist, optimale Lösungen von RFI'en des Typs RFP*1 und $\overline{\text{RFI}}$*1, wobei nur zwei Maschinen zugelassen sind, zu ermitteln. Hierauf wird im folgenden Abschnitt 5.2 eingegangen.

5.2 Die Johnson'sche Regel

In diesem Abschnitt wird erläutert, wie optimale Lösungen für $\overline{\text{RFI}}$*1 und RFP*1 bestimmt werden können, falls die Bearbeitung nur auf zwei Maschinen erfolgt.

Johnson [21] leitete eine einfache Entscheidungsregel her, die es gestattet, für Zielfunktionen der Form

$$\tilde{f}(p) = \max_{1\leq l\leq m} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{l} t_{i_\lambda 1} + \sum_{\lambda=l}^{m} t_{i_\lambda 2} \right\} , \qquad (5.2.1)$$

$p \in S$, eine optimale Auftragsfolge zu ermitteln.
Eine derartige Zielfunktion erhalten wir aus der Darstellung (3.3.36) für $\tilde{f}_1(p)$, falls $n = 2$, $t_1 = t_2 = 0$, $f_{i\,1} = 0$ und $r_{i\,1} = r_{i\,2} = 0$ $(i=1,..,m)$ sind.
Es sei bemerkt, daß in [21] $t_{i_\lambda\, j} > 0$, $\lambda = 1,..,m$ und $j=1,2$, gefordert wird. Eine solche Einschränkung ist jedoch nicht notwendig.

Gegeben sei die Matrix der Bearbeitungszeiten der Aufträge $A_1,\ldots,A_m$ auf den Maschinen M_1 und M_2 .

$$T = \begin{bmatrix} t_{1\,1} & t_{1\,2} \\ t_{2\,1} & t_{2\,2} \\ \vdots & \vdots \\ t_{m\,1} & t_{m\,2} \end{bmatrix}$$

Wir setzen $J = \{1,..,m\}$. Eine optimale Auftragsfolge entsteht wie folgt (J o h n s o n´sche R e g e l) :

1. Es wird ein Auftrag A_{i^*} mit

$$\min\{ t_{i^*1} , t_{i^*2} \} = \min\{ t_{ij} \,/\, i \in J , j=1,2 \}$$

ausgewählt. J wird durch $J \setminus \{ i^* \}$ ersetzt.

2. Ist $t_{i^*1} \leq t_{i^*2}$, so wird der Auftrag A_{i^*} vor den Aufträgen A_i , $i \in J$, bearbeitet; andernfalls nach den Aufträgen A_i , $i \in J$.

3. Ist J mehrelementig, so wird mit 1. fortgefahren; andernfalls ist eine Reihenfolge der Aufträge $A_1,...,A_m$ festgelegt.

Jedem Auftrag A_i , i=1,..,m , sei eine Konstante C_i (welche als Transportzeit interpretiert werden kann) zugeordnet. Anstelle von $\tilde{f}(p)$ betrachten wir die Zielfunktion

$$\hat{f}(p) = \max_{1\leq l\leq m} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{l} t_{i_\lambda 1} + C_{i_1} + \sum_{\lambda=l}^{m} t_{i_\lambda 2} \right\} , \quad (5.2.2)$$

$p \in S$.

Da

$$\max_{1\leq l\leq m} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{l} t_{i_\lambda 1} + C_{i_1} + \sum_{\lambda=l}^{m} t_{i_\lambda 2} \right\}$$

$$= - \sum_{\lambda=1}^{m} C_\lambda + \max_{1\leq l\leq m} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{l} (t_{i_\lambda 1} + C_{i_\lambda}) + \sum_{\lambda=l}^{m} (t_{i_\lambda 2} + C_{i_\lambda}) \right\}$$

gilt, ist ersichtlich, daß unter Verwendung der Johnson´schen Regel, und zwar bezüglich der (fiktiven) Bearbeitungszeitenmatrix

$$T' = (t'_{i\,j})_{m,2} \quad \text{mit} \quad t'_{i\,j} = t_{i\,j} + C_i \quad ,$$

eine optimale Lösung für Probleme mit $\hat{f}(p)$, $p \in S$, als Zielfunktion ermittelt werden kann.

Es soll nun erläutert werden, wie mit Hilfe der Johnson´schen Regel eine optimale Lösung für die Reihenfolgeprobleme RFP*1 und $\overline{RFP}$*1 (damit nach Abschnitt 3.3 ebenfalls für RFP*3 bzw.

MPT*3) bestimmt werden kann, wenn nur zwei Maschinen (M_1 und M_2) zu berücksichtigen sind.

Es sei $n = 2$. Für ${}^*f_1(p)$, $p \in S$, können wir nach (3.3.1) schreiben

$$
\begin{aligned}
{}^*f_1(p) = \max \Big[& t_1 + \sum_{\lambda=1}^{m} (t_{i_\lambda 1} + r_{i_\lambda 1}) \; ; \\
& \max_{\substack{1 \le l \le m \\ i_l \in \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2}} \Big\{ \sum_{\lambda=1}^{l} (t_{i_\lambda 1} + r_{i_\lambda 1}) + \sum_{\lambda=1}^{m} (t_{i_\lambda 2} + r_{i_\lambda 2}) \\
& \qquad + f_{i_l 1} - r_{i_l 2} \Big\} \; ; \; t_2 + \sum_{\lambda=1}^{m} (t_{i_\lambda 2} + r_{i_\lambda 2}) \Big] ,
\end{aligned}
\tag{5.2.3}
$$

wobei $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \neq \phi$ sei (andernfalls stimmen die Werte von ${}^*f_1(p)$ für alle $p \in S$ überein).

Es sei

$$
\begin{aligned}
f_o(p) = \max_{\substack{1 \le l \le m \\ i_l \in \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2}} \Big\{ & \sum_{\lambda=1}^{l} (t_{i_\lambda 1} + r_{i_\lambda 1}) + \sum_{\lambda=1}^{m} (t_{i_\lambda 2} + r_{i_\lambda 2}) \\
& + f_{i_l 1} - r_{i_l 2} \Big\} \quad .
\end{aligned}
\tag{5.2.4}
$$

Da für alle $p \in S$ gilt

$$
\sum_{\lambda=1}^{m} (t_{i_\lambda 1} + r_{i_\lambda 1}) = \sum_{\lambda=1}^{m} (t_{\lambda\, 1} + r_{\lambda\, 1})
$$

und

$$
\sum_{\lambda=1}^{m} (t_{i_\lambda 2} + r_{i_\lambda 2}) = \sum_{\lambda=1}^{m} (t_{\lambda\, 2} + r_{\lambda\, 2}) \quad ,
$$

erkennen wir, daß eine optimale Lösung für $f_o(p)$, $p \in S$, ebenfalls eine optimale Reihenfolge für die Zielfunktion ${}^*f_1(p)$ liefert.

Wir bezeichnen mit m_1 die Anzahl der Aufträge $A_1,..,A_m$, die nur auf der Maschine M_1 zu bearbeiten sind, und mit m_2 die Anzahl der Aufträge, die nur auf der Maschine M_2 zu fertigen sind.

Mit S^o bezeichnen wir die Menge aller Permutationen $p \in S$ mit:

1. Falls $m_2 > 0$ ist, gilt $i_\lambda \in \mathfrak{M}_2 \setminus \mathfrak{M}_1$ für $\lambda = 1,..,m_2$.
2. Falls $m_1 > 0$ ist, gilt $i_\lambda \in \mathfrak{M}_1 \setminus \mathfrak{M}_2$ für $\lambda = m-m_1+1,..,m$.

Wir betrachten zwei Permutationen $p^1, p^2 \in S$ mit

$$p^1 = (i_1,.., i_\varrho , r, s , i_{\varrho+2},..,i_m) ,$$

$$p^2 = (i_1,.., i_\varrho , s, r , i_{\varrho+2},..,i_m) .$$

Aus der Darstellung (5.2.4) für $f_o(p)$ folgt:

1. Falls $r \in \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$ und $s \in \mathfrak{M}_2 \setminus \mathfrak{M}_1$ sind, ist
   $f_o(p^2) \leq f_o(p^1)$.
2. Falls $r \in \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$ und $s \in \mathfrak{M}_1 \setminus \mathfrak{M}_2$ sind, so ist
   $f_o(p^1) \leq f_o(p^2)$.

Demnach können wir uns bei der Bestimmung einer optimalen Lösung für $f_o(p)$, $p \in S$, auf die Menge S^o beschränken.

Da für alle $p \in S^o$ gilt

$$i_\lambda \in \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 , \quad \lambda = m_2+1,..,m-m_1 ,$$

kann $f_o(p)$, $p \in S^o$, wie folgt dargestellt werden

$$f_o(p) = \sum_{\lambda=1}^{m_2} (t_{i_\lambda 1} + r_{i_\lambda 1}) + \sum_{\lambda=m-m_1+1}^{m} (t_{i_\lambda 2} + r_{i_\lambda 2})$$

$$+ \max_{m_2+1 \leq l \leq m-m_1} \Big\{ \sum_{\lambda=m_2+1}^{l} (t_{i_\lambda 1} + r_{i_\lambda 1})$$

$$+ f_{i_l 1} - r_{i_l 2} + \sum_{\lambda=l}^{m-m_1} (t_{i_\lambda 2} + r_{i_\lambda 2}) \Big\} \quad .(5.2.5)$$

Wir definieren die (fiktive) Bearbeitungszeitenmatrix T'' für die Aufträge A_i, die sowohl auf der Maschine M_1 als auch auf der Maschine M_2 zu bearbeiten sind.

$$T'' = (t''_{ij})_{m-m_1-m_2,2} \quad \text{mit}$$

$$t''_{i1} = t_{i1} + r_{i1} + f_{i1} - r_{i2} \quad , \tag{5.2.6}$$

$$t''_{i2} = t_{i2} + f_{i1} \quad . \tag{5.2.7}$$

Die Glieder $\sum_{\lambda=1}^{m_2}(t_{i_\lambda 1} + r_{i_\lambda 1})$ und $\sum_{\lambda=m-m_1+1}^{m}(t_{i_\lambda 2} + r_{i_\lambda 2})$ auf der rechten Seite von (5.2.5) stimmen für alle $p \in S^o$ überein. Vergleichen wir die rechte Seite von (5.2.5) mit der Darstellung von $\hat{f}(p)$, so stellen wir fest, daß eine Auftragsfolge $A_{i_1},\ldots,A_{i_m}$, $p \in S^o$, deren Aufträge $A_{i_{m_2+1}},\ldots,A_{i_{m-m_1}}$ ausgehend von der (dazugehörigen) Matrix T'' mit Hilfe der Johnson'schen Regel festgelegt sind, eine optimale Lösung für $f_c(p)$, $p \in S$, liefert. Damit ist aber ebenfalls eine optimale Lösung für die Zielfunktion $^*f_1(p)$, $p \in S$, bekannt.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß eine Auftragsfolge $A_{i_1},\ldots,A_{i_m}$, $p \in S$, mit den nachfolgenden Eigenschaften (a),(b) und (c) eine optimale Lösung für die Zielfunktion $^*f_1(p)$, $p \in S$, liefert.

(a) Zuerst sind die Aufträge, die nur auf der zweiten Maschine zu bearbeiten sind, angeordnet (falls es derartige Aufträge gibt).

(b) Dann sind die Aufträge, die auf beiden Maschinen zu fertigen sind, angeordnet (falls es derartige Aufträge gibt). Ihre Reihenfolge sei ausgehend von der dazugehörigen (fiktiven) Bearbeitungszeitenmatrix T'' mit Hilfe der Johnson'schen Regel festgelegt.

(c) Zuletzt sind die Aufträge, die nur auf der ersten Maschine zu bearbeiten sind, angeordnet (falls derartige Aufträge zu berücksichtigen sind).

Es sei darauf hingewiesen, daß in den Bedingungen (a), (b) und (c) die Kapazitätsbelastungen der Maschinen unberücksichtigt bleiben.
Bei der Ermittlung einer optimalen Reihenfolge für $\overline{F/F}\,|\,1$ ist nur die Bedingung (b) zu betrachten.

Wir behandeln nun den Fall, daß für eine Teilmenge $S_{i_m;} \subseteq S$ eine optimale Lösung zu ermitteln ist, d.h. es ist eine Permutation $p^* \in S_{i_m;}$ gesucht mit

$$^*f_1(p^*) = \min \{ {}^*f_1(p) \;/\; p \in S_{i_m;} \} \qquad (5.2.8)$$

bzw.

$$^*\bar{f}_1(p^*) = \min \{ {}^*\bar{f}_1(p) \;/\; p \in S_{i_m;} \} \; . \qquad (5.2.9)$$

O.B.d.A. erörtern wir das Vorgehen bei der Bestimmung einer optimalen Lösung mit (5.2.8).
Für eine Permutation $p \in S_{i_m;}$ (vgl. Kapitel 4) kann die Zielfunktion $^*f_1(p)$ wie folgt umgeformt werden.

1. Fall: Es sei $\{ \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \} \setminus \{ i_m \} = \phi$.

$$^*f_1(p) = \max \Big[t_1 + \sum_{\lambda=1}^{m} (t_{\lambda\,1} + r_{\lambda\,1}) + t_{i_m\,2} + f_{i_m\,2} \; ;$$

$$t_2 + \sum_{\lambda=1}^{m} (t_{\lambda\,2} + r_{\lambda\,2}) \Big] \qquad .$$

2. Fall: Es sei $\{ \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \} \setminus \{ i_m \} \neq \phi$.

$$^*f_1(p) = \max \Big[t_1 + \sum_{\lambda=1}^{m} (t_{\lambda\,1} + r_{\lambda\,1}) + t_{i_m\,2} + f_{i_m\,2} \; ;$$

$$\max_{\substack{1 \le l \le m-1 \\ i_l \in \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2}} \Big\{ \sum_{\lambda=1}^{l} (t_{i_\lambda 1} + r_{i_\lambda 1}) + \sum_{\lambda=1}^{m-1} (t_{i_\lambda 2} + r_{i_\lambda 2}) + f_{i_l 1} - r_{i_l 2} \Big\} + t_{i_m 2} + r_{i_m 2} \; ; \sum_{\lambda=1}^{m} (t_{\lambda 2} + r_{\lambda 2}) + t_2 \Big] \; . \qquad (5.2.10)$$

Im 1. Fall kann eine beliebige Permutation $p \in S_{i_m}$; gewählt werden.
Aus der Darstellung (5.2.10) erkennen wir, daß nur die Größe

$$\max_{1 \le l \le m-1} \Big\{ \sum_{\lambda=1}^{l} (t_{i_\lambda 1} + r_{i_\lambda 1}) + \sum_{\lambda=1}^{m-1} (t_{i_\lambda 2} + r_{i_\lambda 2}) + f_{i_1 1} - r_{i_1 2} \Big\} \quad (5.2.11)$$

$$i_1 \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$$

von der Reihenfolge $A_{i_1},..,A_{i_{m-1}}$, der Aufträge A_i, $i \in \{1,..,m\} \setminus \{i_m\}$, abhängt. Vergleichen wir (5.2.11) mit (5.2.4), so ist ersichtlich, daß eine Auftragsfolge $A_{i_1},...,A_{i_m}$, $p \in S_{i_m}$, deren Aufträge $A_{i_1},..,A_{i_{m-1}}$ entsprechend (a), (b) und (c) angeordnet sind, eine optimale Lösung für das Problem (5.2.8) darstellt.

Beispiel 5.2 Es sind sechs Aufträge auf zwei Maschinen zu bearbeiten. Dabei sind gegeben:

$$\mathcal{M}_1 = \{2\} \quad \mathcal{M}_2 = \{1, 2\} \quad \mathcal{M}_3 = \{1, 2\}$$

$$\mathcal{M}_4 = \{1\} \quad \mathcal{M}_5 = \{1, 2\} \quad \mathcal{M}_6 = \{1, 2\}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 2 \\ 7 & 1 \\ 8 & 0 \\ 1 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \\ 6 & 0 \\ 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad t = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

Für T'' (nach (5.2.6) und (5.2.7)) ergibt sich

$$T'' = \begin{bmatrix} t''_{2\,1} & t''_{2\,2} \\ t''_{3\,1} & t''_{3\,2} \\ t''_{5\,1} & t''_{5\,2} \\ t''_{6\,1} & t''_{6\,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 1 & 2 \\ 11 & 13 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} .$$

Nach (a), (b) und (c) ist $\bar{p} = (1,3,6,5,2,4)$ eine optimale Lösung von RFP*1 . Falls $i_m = 6$ festgelegt ist, liefert $p^* = (1,3,5,2,4,6)$ eine optimale Lösung für (5.2.8).

5.3 Schrankenbildung für RFT*1, RFT*2 und RFT*3

Wir definieren die folgenden Teilmengen der nach (3.1.4) festgelegten Mengen $\bar{L}_{v,n,m}$:

$$\bar{L}_{v,n,m}(s_v) = \{ (l_{v-1},..,l_n) \in \bar{L}_{v,n,m} \,/\, l_v=...=l_{v+s-1}=l \;;\; l_{v+s} = ... = l_n = m \} \,, \quad (5.3.1)$$

für $v = 1,..,n-1$ und $s_v = 1,..,n-v$;

$$\bar{L}_{v,n,m}(s_v) = \{ (l_{v-1},..,l_n) \in \bar{L}_{v,n,m} \,/\, l_v = ... = l_n = m \} \,, \quad (5.3.2)$$

für $v = 1,..,n$ und $s_v = 0$.

Es sei $p \in S$ beliebig gewählt.
Für den Zielfunktionswert $^*\bar{T}_1(p)$ haben wir nach (3.3.1)

$$^*\bar{T}_1(p) = \max_{1\le v\le n} \Big\{ \max_{\bar{L}_{v,n,m}} \Big\{ t_v + \sum_{\mu=v}^{n} \sum_{\lambda=l_{\mu-1}}^{l_\mu} (t_{i_\lambda \mu} + r_{i_\lambda \mu}) + \sum_{\mu=v}^{n-1} (f_{i_{l_\mu} \mu} - r_{i_{l_\mu} \mu+1}) \Big\} \Big\} \,. \quad (5.3.3)$$

Aus (5.3.1) bis (5.3.3) folgt

$$^*\bar{T}_1(p) \ge \max_{\bar{L}_{v,n,m}(s_v)} \Big\{ t_v + \sum_{\mu=v}^{n} \sum_{\lambda=l_{\mu-1}}^{l_\mu} (t_{i_\lambda \mu} + r_{i_\lambda \mu}) + \sum_{\mu=v}^{n-1} (f_{i_{l_\mu} \mu} - r_{i_{l_\mu} \mu+1}) \Big\} \,.$$

Wir erhalten

$$^*\bar{T}_1(p) \ge t_v + \sum_{\ell=1}^{m} (t_{i_\ell\, v} + r_{i_\ell\, v}) + \sum_{\eta=v+1}^{n} (t_{i_m \eta} + f_{i_m \eta-1}) \,, \quad (5.3.4)$$

für $v = 1,..,n$ und $s_v = 0$, sowie

$$*\bar{T}_1(p) \geq t_v + \max_{1\leq l\leq m} \Big\{ \sum_{\varrho=1}^{l} (t_{i_\varrho v} + r_{i_\varrho v}) + \sum_{\mu=v+1}^{v+s_v} (t_{i_1\mu} + f_{i_1\mu-1}) + \sum_{\varrho=l+1}^{m} (t_{i_\varrho v+s_v} + r_{i_\varrho v+s_v}) \Big\} + \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_m\eta} + f_{i_m\eta-1}), \tag{5.3.5}$$

für $v = 1,..,n-1$ und $s_v = 1,..,n-v$.

Da für alle $s_v \in \{ 1,..,n-v \}$, $v=1,..,n-1$, die Inklusion

$$\bar{L}_{v,n,m}(0) \subset \bar{L}_{v,n,m}(s_v) \tag{5.3.6}$$

gilt, liefert die rechte Seite von (5.3.5) eine bessere Abschätzung des Zielfunktionswertes $*\bar{T}_1(p)$. Bei der Abschätzung von $*\bar{T}_1(p)$ werden nach (5.3.4) ein Maximierungsglied und nach (5.3.5) m Maximierungsglieder aus der Darstellung (5.3.3) für $*\bar{T}_1(p)$ verwendet.

Für $\lambda = 0,..,m-1$, $v = 1,..,n$ und $s_v = 0,..,n-v$ definieren wir

$$*\bar{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) = \max_{\lambda+1\leq l\leq m} \Big\{ \sum_{\varrho=\lambda+1}^{l} (t_{i_\varrho v} + r_{i_\varrho v}) + \sum_{\mu=v+1}^{v+s_v} (t_{i_1\mu} + f_{i_1\mu-1}) + \sum_{\varrho=l+1}^{m} (t_{i_\varrho v+s_v} + r_{i_\varrho v+s_v}) \Big\}$$

$$= \max_{\lambda+1\leq l\leq m} \Big\{ \sum_{\varrho=\lambda+1}^{l} (t_{i_\varrho v} + r_{i_\varrho v}) + f_{i_1 v} - r_{i_1 v+s_v} + \sum_{\mu=v+1}^{v+s_v-1} (t_{i_1\mu} + f_{i_1\mu}) + \sum_{\varrho=l+1}^{m} (t_{i_\varrho v+s_v} + r_{i_\varrho v+s_v}) \Big\}, \tag{5.3.7}$$

wobei $S(I_o) \underset{\text{Def.}}{=} S$, $p_\lambda = (i_{\lambda+1},..,i_m)$ und $p_\lambda \in S(I_\lambda)$ sind.

Unter Verwendung von (5.3.7) können wir anstelle von (5.3.4) und (5.3.5) schreiben

$$*\bar{T}_1(p) \geq t_v + *\bar{h}_{v,s_v,o}(p_o) + \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_m\eta} + f_{i_m\eta-1}) , \tag{5.3.8}$$

$v = 1,..,n$, $s_v \in \{ 0,..,n-v \}$ und $p_o = p$.

Nach Abschnitt 5.1 erhalten wir aus (5.3.8), wenn t_v durch ${}^*\overline{x}^{\alpha}_{\lambda v}$ und ${}^*\overline{h}_{v,s_v,0}(p_0)$ durch ${}^*\overline{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda)$ ersetzt werden, für eine beliebige Reihenfolge $p \in S_{i_1,..,i_\lambda}$ und $p_\lambda = (i_{\lambda+1},..,i_m)$:

$$ {}^*\overline{f}_\alpha(p) \geq {}^*\overline{x}^{\alpha}_{\lambda v} + {}^*\overline{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) + \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_m\eta} + f_{i_m\eta-1}) \quad , \tag{5.3.9} $$

(für $\alpha = 1, 2, 3$, $\lambda = 1,..,m-1$, $v = 1,..,n$ und $s_v=0,..,n-v$).

Für alle $p \in S_{i_m;i_1,..,i_\lambda}$, ($\lambda=1,..,m-1$), folgt aus (5.3.9)

$$ {}^*\overline{f}_\alpha(p) \geq {}^*\overline{x}^{\alpha}_{\lambda v} + \min\{ {}^*\overline{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \;/\; p_\lambda \in S_{i_m}(I_\lambda) \} + \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_m\eta} + f_{i_m\eta-1}) \tag{5.3.10} $$

$$ \geq {}^*\overline{x}^{\alpha}_{\lambda v} + \min\{ {}^*\overline{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \;/\; p_\lambda \in S(I_\lambda) \} + \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_m\eta} + f_{i_m\eta-1}) \quad , \tag{5.3.11} $$

($\alpha = 1, 2, 3$, $v=1,..,n$, $s_v=0,..,n-v$) .

Falls $s_v = n-v$, ($v=1,..,n$), gewählt wird, liefert die rechte Seite der Ungleichung (5.3.11) sogar eine untere Abschätzung der Zielfunktionswerte ${}^*\overline{f}_\alpha(p)$ für alle $p \in S_{i_1,..,i_\lambda}$, d.h. es gilt für alle Permutationen $p \in S_{i_1,..,i_\lambda}$:

$$ {}^*\overline{f}_\alpha(p) \geq {}^*\overline{x}^{\alpha}_{\lambda v} + \min\{ {}^*\overline{h}_{v,n-v,\lambda}(p_\lambda) \;/\; p_\lambda \in S(I_\lambda) \} \quad . \tag{5.3.12} $$

Falls s_v , ($v=1,..,n$), als $s_v = 0$ festgelegt ist, gilt für alle $p_\lambda = (i_{\lambda+1},..,i_m) \in S(I_\lambda)$:

$$ {}^*\overline{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) = \sum_{l \in I_\lambda} (t_{l\,v} + r_{l\,v}) \quad . \tag{5.3.13} $$

In diesem Fall stimmen die Ausdrücke auf den rechten Seiten

von (5.3.10) und (5.3.11) überein.

Die Minima

$$\min \{ {}^{*}\bar{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S(I_\lambda) \} \tag{5.3.14}$$

und

$$\min \{ {}^{*}\bar{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S_{i_m}(I_\lambda) \} \quad , \tag{5.3.15}$$

($v = 1,..,n-1$ und $s_v \in \{1,..,n-v\}$), in den Ausdrücken auf den rechten Seiten von (5.3.10) und (5.3.11) können unter Verwendung der Johnson'schen Regel leicht bestimmt werden (vgl. Abschnitt 5.2). Setzen wir nämlich für alle Indizes $i \in I_\lambda$

$$t'_{i\,1} = t_{i\,v} + r_{i\,v} \quad ,$$

$$t'_{i\,2} = t_{i\,v+s_v} + r_{i\,v+s_v}$$

und

$$C'_i = \sum_{\mu=v+1}^{v+s_v-1} (t_{i\,\mu} + f_{i\,\mu}) + f_{i\,v} - r_{i\,v+s_v} \quad ,$$

so ergibt sich nach (5.3.7)

$${}^{*}\bar{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) = \max_{\lambda+1 \le l \le m} \{ \sum_{\varrho=\lambda+1}^{l} t'_{i_\varrho 1} + C'_{i_\varrho} + \sum_{\varrho=l}^{m} t'_{i_\varrho 2} \} \, , \tag{5.3.16}$$

$p_\lambda \in S(I_\lambda)$. Demnach besitzt ${}^{*}\bar{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda)$ nach (5.3.16) die Form der im vorhergehenden Abschnitt betrachteten Zielfunktion $\hat{f}(p)$.

Es seien $s_v \in \{0,..,n-v\}$, $v=1,..,n$, beliebig gewählt. Wir bezeichnen

$${}^{*}\hat{\bar{J}}^{\lambda}_{i_1,...,i_\lambda} = \min_{i_m \in I_\lambda} \{ \max_{1 \le v \le n} [{}^{*}\bar{x}^{\lambda}_{\lambda v} + \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_m \eta} + f_{i_m \eta - 1}) + \min \{ {}^{*}\bar{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S_{i_m}(I_\lambda) \}] \} \, , \tag{5.3.17}$$

$$ {}^{*}\overline{C}^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda} = \min_{i_m \in I_\lambda} \Big\{ \max_{1 \le v \le n} \Big[{}^{*}\overline{x}^{\alpha}_{\lambda v} + \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_m}\eta + f_{i_m}\eta - 1) + \min \{ {}^{*}\overline{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S(I_\lambda) \} \Big] \Big\} , \tag{5.3.18} $$

für $\alpha = 1, 2$ und $\lambda = 1,..,m-1$ sowie für $\alpha = 3$ und $\lambda = 1,..,m-2$;

$$ {}^{*}\overline{B}^{3}_{i_1,..,i_{m-1}} = {}^{*}\overline{f}_3(p) \quad , p \in S_{i_1,..,i_{m-1}} \quad ; \tag{5.3.19} $$

$$ {}^{*}\overline{C}^{3}_{i_1,..,i_{m-1}} = {}^{*}\overline{f}_3(p) \quad , p \in S_{i_1,..,i_{m-1}} \quad . \tag{5.3.20} $$

Satz 5.3.1 : Es seien ${}^{*}\overline{B}^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda}$ und ${}^{*}\overline{C}^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) die durch (5.3.17) bis (5.3.20) definierten Größen, dann gilt für alle $p \in S_{i_1,..,i_\lambda}$ ($\lambda = 1,..,m-2$) :

$$ {}^{*}\overline{f}_\alpha(p) \ge {}^{*}\overline{B}^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda} \ge {}^{*}\overline{C}^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda} \quad . \tag{5.3.21} $$

Wenn $\lambda = m-1$ ist, haben wir

$$ {}^{*}\overline{f}_\alpha(p) = {}^{*}\overline{B}^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda} = {}^{*}\overline{C}^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda} \quad , p \in S_{i_1,..,i_\lambda} \quad . \tag{5.3.22} $$

Beweis : Nach (5.3.10) und (5.3.11) sind die Beziehungen (5.3.21) für alle Permutationen $p \in S_{i_m;i_1,..,i_\lambda}$, wobei $i_m \in I_\lambda$ beliebig festgewählt ist, erfüllt. Da

$$ S_{i_1,..,i_\lambda} = \bigcup_{i_m \in I_\lambda} S_{i_m;i_1,..,i_\lambda} $$

gilt, ist (5.3.21) für alle $p \in S_{i_1,..,i_\lambda}$ erfüllt.

Für $\lambda = m-1$ sind die Klassen $S_{i_1,..,i_\lambda}$ und $S_{i_m;i_1,..,i_\lambda}$ einelementig, und es sind $S_{i_m;i_1,..,i_\lambda} = S_{i_1,..,i_\lambda}$. Aus (5.3.19) und (5.3.20) ist für $\alpha = 3$ unmittelbar die Gültigkeit der Behauptung (5.3.22) ersichtlich.
Für $\alpha = 1$ und $\alpha = 2$ erhalten wir

$$ {}^{*}\overline{\Pi}^{\alpha}_{i_1,..,i_{m-1}} = {}^{*}\overline{C}^{\alpha}_{i_1,..,i_{m-1}} $$

und

$$ {}^{*}\overline{C}^{\alpha}_{i_1,..,i_{m-1}} = \max_{1\le v\le n} \Big[{}^{*}\overline{x}^{\alpha}_{m-1\ v} + t_{i_m\ v} + r_{i_m\ v} + \sum_{\mu=v+1}^{n} (t_{i_m\ \mu} + f_{i_m\ \mu-1}) \Big] \quad . \qquad (5.3.23) $$

Nach (5.1.5) und (5.1.7) können wir in (5.3.23) ${}^{*}\overline{x}^{\alpha}_{m-1\ v}$ durch ${}^{*}\overline{z}^{\alpha}_{i_{m-1}\ v}$ ersetzen. Damit wird

$$ {}^{*}\overline{C}^{\alpha}_{i_1,..,i_{m-1}} = \max_{1\le v\le n} \Big[{}^{*}\overline{z}^{\alpha}_{i_{m-1}\ v} + t_{i_m\ v} + r_{i_m\ v} + \sum_{\mu=v+1}^{n} (t_{i_m\ \mu} + f_{i_m\ \mu-1}) \Big] \quad . \qquad (5.3.24) $$

Vergleichen wir die rechte Seite von (5.3.24) mit den durch (3.2.23) bis (3.2.26) gegebenen (rekursiven) Darstellungen für ${}^{*}\overline{f}_1(p)$ und ${}^{*}\overline{f}_2(p)$, $p \in S_{i_1,..,i_{m-1}}$, so ist ersichtlich, daß

$$ {}^{*}\overline{C}^{\alpha}_{i_1,..,i_{m-1}} = {}^{*}\overline{f}_{\alpha}(p) \quad , \ \alpha = 1, 2 \ , \text{ gilt.} $$

Damit ist der Beweis des Satzes erbracht.

Nach (5.3.21) wissen wir, daß die ${}^{*}\overline{B}^{\alpha}$ - Schranken qualitativ besser sind als die entsprechenden ${}^{*}\overline{C}^{\alpha}$ - Schranken.
Wird bei der Festlegung der ${}^{*}\overline{B}^{\alpha}$ - und ${}^{*}\overline{C}^{\alpha}$ - Schranken von den Werten

$$ s_1 = s_2 = \ldots = s_n = 0 \qquad (5.3.25) $$

ausgegangen, so erhalten wir wegen (5.3.13) :

$$ {}^{*}\overline{C}^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda} = {}^{*}\overline{B}^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda} = \min_{i_m \in I_\lambda} \Big\{ \max_{1\le v\le n} \Big[{}^{*}\overline{x}^{\alpha}_{\lambda v} + \sum_{\eta=v+1}^{n} (t_{i_m\ \eta} + f_{i_m \eta-1}) + \sum_{l \in I_\lambda} (t_{l\ v} + r_{l\ v}) \Big] \Big\} , \qquad (5.3.26) $$

$\lambda = 1,..,m-2$. Die ${}^{*}\overline{B}^{\alpha}$ - Schranken und ${}^{*}\overline{C}^{\alpha}$ - Schranken stimmen in diesem Fall überein und zeichnen sich durch ihre Einfachheit aus.
Schranken der Form (5.3.26) bilden die Grundlage der u.a.

in [4] entwickelten "Branch and Bound" - Verfahren zur Lösung von RFP'en mit gleichen Auftrags- und Maschinenfolgen.

Werden bei der Definition der ${}^{*}\overline{B}^{\alpha}$ - und ${}^{*}\overline{C}^{\alpha}$ - Schranken die Werte s_v , v=1,..,n-1 , nicht ensprechend (5.3.25) gewählt, so bewirkt jedes $s_v > 0$, daß bei der Berechnung einer Schranke ${}^{*}\overline{B}^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda}$ $(m-\lambda)$ Minima des Typs (5.3.15) und bei der Berechnung einer Schranke ${}^{*}\overline{C}^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda}$ ein Minimum des Typs (5.3.14) zu bestimmen sind. Demnach steht der höheren Qualität der ${}^{*}\overline{B}^{\alpha}$ - Schranken der erhöhte Rechenaufwand gegenüber.

Gehen wir bei der Festlegung der ${}^{*}\overline{C}^{\alpha}$ - Schranken von den Werten

$$s_v = n-v \quad , \quad v=1,..,n \ ,$$

aus, so nehmen diese Schranken die nachstehende einfache Form an

$$ {}^{*}\overline{C}^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda} = \max_{1\le v\le n} \left[{}^{*}\overline{x}^{\alpha}_{\lambda v} + \min \left\{ {}^{*}\overline{h}_{v,n-v,\lambda}(p_\lambda) \ / \ p_\lambda \in S(I_\lambda) \right\} \right] , \tag{5.3.27}$$

$\lambda = 1,..,m-2$.

Derartige Schranken werden u.a. in [19] (für $\alpha = 1$) und in [5] (für $\alpha = 1, 2, 3$) angegeben.

Mit der Wahl von Werten s_v größer als Null bei der Festlegung von ${}^{*}\overline{B}^{\alpha}$ - Schranken ist eine Erhöhung der Qualität dieser Schranken verbunden. Um das einzusehen, genügt es, auf die Beziehung

$$\begin{aligned} &\min \left\{ {}^{*}\overline{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \ / \ p_\lambda \in S_{i_m}(I_\lambda) \right\} \\ &\ge \min \left\{ {}^{*}\overline{h}_{v,0,\lambda}(p_\lambda) \ / \ p_\lambda \in S_{i_m}(I_\lambda) \right\} + \sum_{\mu=v+1}^{v+s_v} (t_{i_m\mu} + f_{i_m\mu-1}) \ , \end{aligned} \tag{5.3.28}$$

wobei $i_m \in I_\lambda$ beliebig festgewählt, $s_v \in \{1,..,n-v\}$ und $v \in \{1,..,n-1\}$ sind, zu verweisen (vgl. hierzu auch (5.3.6)). Für ${}^{*}\overline{C}^{\alpha}$ - Schranken gilt im allgemeinen die obige Feststellung nicht.

Hilfssatz 5.3.1 : Es seien $v \in \{1,..,n-1\}$ und $s_v \in \{1,..,n-v\}$ beliebig gewählt. Falls

$$\min_{1\le i\le m}\Big\{\sum_{\mu=v}^{v+s_v-1}(t_{i\,\mu}+f_{i\,\mu})+r_{i\,v}-r_{i\,v+s_v}\Big\} \tag{5.3.29}$$
$$\ge \max_{1\le i\le m}\Big\{\sum_{\mu=v}^{v+s_v-1}(t_{i\,\mu}+f_{i\,\mu})+t_{i\,v+s_v}-t_{i\,v}\Big\}$$

ist, gilt

$$*\bar{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) = *\bar{h}_{v,0,\lambda}(p_\lambda) + \sum_{\mu=v+1}^{v+s_v}(t_{i_m\mu}+f_{i_m\mu-1}) \tag{5.3.30}$$

für alle $p_\lambda \in S(I_\lambda)$, $(\lambda = 1,..,m-1)$.

Beweis : Die Maximierungsglieder in der Darstellung (5.3.7) für $*\bar{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda)$ haben die Form

$$Z_l = \sum_{\varrho=\lambda+1}^{l}(t_{i_\varrho v}+r_{i_\varrho v}) + \sum_{\mu=v+1}^{v+s_v-1}(t_{i_l\mu}+f_{i_l\mu})$$
$$+ f_{i_l v} - r_{i_l\,v+s_v} + \sum_{\varrho=l}^{m}(t_{i_\varrho\,v+s_v}+r_{i_\varrho\,v+s_v}) , \tag{5.3.31}$$

$l = \lambda+1,..,m$.

Für Z_m haben wir

$$Z_m = *\bar{h}_{v,0,\lambda}(p_\lambda) + \sum_{\mu=v+1}^{v+s_v}(t_{i_m\mu}+f_{i_m\mu-1}) \quad . \tag{5.3.32}$$

Falls $\lambda+1 = m$ ist, ist offenbar die Beziehung (5.3.30) erfüllt. Andernfalls erhalten wir mit (5.3.29) :

$$Z_{l^*+1} - Z_{l^*} = \Big\{\sum_{\mu=v}^{v+s_v-1}(t_{i_{l^*+1}\mu}+f_{i_{l^*+1}\mu}) + r_{i_{l^*+1}\,v}$$
$$- r_{i_{l^*+1}\,v+s_v}\Big\} - \Big\{\sum_{\mu=v}^{v+s_v-1}(t_{i_{l^*}\mu}+f_{i_{l^*}\mu})$$
$$+ t_{i_{l^*}\,v+s_v} - t_{i_{l^*}\,v}\Big\} \ge 0 \quad ,$$

wobei $l^* \in \{\lambda+1,..,m-1\}$ sei. Hieraus folgt, daß

$z_m = {}^*\overline{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda)$ ist. Mit (5.3.32) stellen wir fest, daß die Behauptung des Hilfssatzes richtig ist.

Wir betrachten die Ausdrücke auf den rechten Seiten von (5.3.10) und (5.3.11), die bei der Bildung der ${}^*\overline{B}^\alpha$ - und ${}^*\overline{C}^\alpha$ - Schranken verwendet werden. Falls für v und s_v^* die Voraussetzungen des Hilfssatzes 5.3.1 erfüllt sind, ergibt sich mit (5.3.30) und (5.3.13) für alle $p \in S_{i_m;i_1,..i_\lambda}$ $(\lambda = 1,..,m-1)$:

$$
\begin{aligned}
&{}^*\overline{x}^\alpha_{\lambda v} + \min\{{}^*\overline{h}_{v,s_v^*,\lambda}(p_\lambda) \;/\; p_\lambda \in S_{i_m}(I_\lambda)\} \\
&\quad + \sum_{\eta=v+s_v^*+1}^{n} (t_{i_m\eta} + f_{i_m\eta-1}) \\
&= {}^*\overline{x}^\alpha_{\lambda v} + \min\{{}^*\overline{h}_{v,0,\lambda}(p_\lambda) \;/\; p_\lambda \in S_{i_m}(I_\lambda)\} \\
&\quad + \sum_{\eta=v+1}^{n} (t_{i_m\eta} + f_{i_m\eta-1}) \qquad (5.3.33)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&{}^*\overline{x}^\alpha_{\lambda v} + \min\{{}^*\overline{h}_{v,s_v^*,\lambda}(p_\lambda) \;/\; p_\lambda \in S(I_\lambda)\} + \sum_{\eta=v+s_v^*+1}^{n} (t_{i_m\eta} + f_{i_m\eta-1}) \\
&\leq {}^*\overline{x}^\alpha_{\lambda v} + \min\{{}^*\overline{h}_{v,0,\lambda}(p_\lambda) \;/\; p_\lambda \in S(I_\lambda)\} + \sum_{\eta=v+1}^{n} (t_{i_m\eta} + f_{i_m\eta-1}) . \qquad (5.3.34)
\end{aligned}
$$

Aus (5.3.33) und (5.3.34) ist ersichtlich, daß es vorteilhafter ist, anstelle von s_v^* den Wert $s_v = 0$ bei der Bildung von ${}^*\overline{B}^\alpha$ - und ${}^*\overline{C}^\alpha$ - Schranken zu wählen. Einerseits vereinfacht sich dadurch die Berechnung der Schranken, andererseits tritt keine Verschlechterung der Qualität der Schranken auf. Die Qualität der ${}^*\overline{C}^\alpha$ - Schranken wird wegen (5.3.34) sogar erhöht.

Es sei darauf hingewiesen, daß bei der Definition von $*\bar{z}^3_{i_1,..,i_{m-1}}$ und $*\bar{c}^3_{i_1,..,i_{m-1}}$ (unabhängig von den gewählten Werten s_ν , $\nu=1,..,n$) entsprechend (5.3.17) bzw. (5.3.18) die Bedingung (5.3.22) im allgemeinen nicht erfüllt ist. Der Grund hierfür besteht darin, daß nach (5.1.6) und (5.1.7) für $*\bar{z}^3_{i_{m-1}\,\nu}$, $p\in S_{i_1,..,i_{m-1}}$, und $*\bar{x}^3_{m-1\,\nu}$, $\nu=1,..,n$, gewöhnlich nicht die Gleichung $*\bar{x}^3_{m-1\,\nu} = *\bar{z}^3_{i_{m-1}\,\nu}$ erfüllt wird.

Es wird nun dargelegt, wie die Abschätzung der Fertigstellungszeiten $*\bar{z}^3_{i_\lambda\,k}$, $k=1,..,n$, durch (konstante) Größen $*\bar{y}^3_{\lambda\,k}$ mit

$$*\bar{x}^3_{\lambda\,k} \leqq *\bar{y}^3_{\lambda\,k} \leqq *\bar{z}^3_{i_\lambda\,k} \quad \text{, für alle } p\in S_{i_1,..,i_\lambda} \text{ ,} \tag{5.3.35}$$

bzw. durch Größen $*\bar{y}^3_{\lambda\,k}(i_m)$ mit

$$*\bar{x}^3_{\lambda\,k} \leqq *\bar{y}^3_{\lambda\,k}(i_m) \leqq *\bar{z}^3_{i_\lambda\,k} \quad \text{, für alle } p\in S_{i_m;i_1,..,i_\lambda} \text{ ,} \tag{5.3.36}$$

($\lambda=1,..,m-1$), verbessert werden kann.

Es sei $p\in S$ beliebig gewählt.
Berücksichtigen wir, daß

$$*\bar{z}^3_{i_\lambda\,\nu} = *\bar{z}^3_{i_m\,\nu} - \sum_{\mu=\lambda+1}^{m}(t_{i_\mu\,\nu} + r_{i_\mu\nu}) \quad , \nu=1,..,n \text{ ,}$$

gilt, so erhalten wir aus (3.2.31) und (3.2.32) :

$$*\bar{z}^3_{i_\lambda\,1} = t_1 + \sum_{\varrho=1}^{\lambda}(t_{i_\varrho\,1} + r_{i_\varrho\,1}) \quad , \tag{5.3.37}$$

$$*\bar{z}^3_{i_\lambda\,\nu} = \max\Big[\, t_\nu + \sum_{\varrho=1}^{\lambda}(t_{i_\varrho\,\nu} + r_{i_\varrho\,\nu}) \quad ,$$

$$*\bar{z}^3_{i_\lambda\,\nu-1} + \sum_{\mu=\lambda+1}^{m}(t_{i_\mu\nu-1} + r_{i_\mu\nu-1} - t_{i_\mu\nu} - r_{i_\mu\nu})$$

$$+ \max_{1\leq l\leq m}\Big\{ \sum_{\varrho=l+1}^{m}(t_{i_\varrho\nu} + r_{i_\varrho\nu} - t_{i_\varrho\nu-1} - r_{i_\varrho\nu-1})$$

$$+ f_{i_l\,\nu-1} + t_{i_l\nu}\Big\}\Big] \text{ ,} \tag{5.3.38}$$

$\nu=2,..,n$.

Entsprechend der Definition der Größen ${}^{*}\bar{x}^{3}_{\lambda\,\nu}$ (anstelle von m ist λ zu betrachten) ergibt sich aus (5.3.37) und (5.3.38) :

$$ {}^{*}\bar{x}^{3}_{\lambda\,1} = t_1 + \sum_{\varrho=1}^{\lambda} (t_{i_\varrho 1} + r_{i_\varrho 1}) \quad , \tag{5.3.39} $$

$$ {}^{*}\bar{x}^{3}_{\lambda\,\nu} = \max \Big[t_\nu + \sum_{\varrho=1}^{\lambda} (t_{i_\varrho \nu} + r_{i_\varrho \nu}) \quad , \; {}^{*}\bar{x}^{3}_{\lambda\,\nu-1} $$

$$ + \max_{1 \le l \le \lambda} \Big\{ f_{i_l \nu-1} + t_{i_l \nu} + \sum_{\varrho=l+1}^{\lambda} (t_{i_\varrho \nu} + r_{i_\varrho \nu} - t_{i_\varrho \nu-1} $$

$$ - r_{i_\varrho \nu-1}) \Big\} \Big] , \tag{5.3.40} $$

$\nu = 2,..,n$.

Mit den Bezeichnungen nach (5.3.7) kann (5.3.38) wie folgt umgeformt werden :

$$ {}^{*}\bar{z}^{3}_{i_\lambda\,\nu} = \max \Big[t_\nu + \sum_{\varrho=1}^{\lambda} (t_{i_\varrho \nu} + r_{i_\varrho \nu}) \quad , $$

$$ {}^{*}\bar{z}^{3}_{i_\lambda\,\nu-1} + \max_{1 \le l \le \lambda} \Big\{ f_{i_l\,\nu-1} + t_{i_l\,\nu} + \sum_{\varrho=l+1}^{\lambda} (t_{i_\varrho \nu} $$

$$ + r_{i_\varrho \nu} - t_{i_\varrho \nu-1} - r_{i_\varrho \nu-1}) \Big\} , $$

$$ {}^{*}\bar{z}^{3}_{i_\lambda\,\nu-1} - \sum_{\varrho=\lambda+1}^{m} (t_{i_\varrho \nu} + r_{i_\varrho \nu}) + {}^{*}\bar{h}_{\nu-1,1,\lambda}(p_\lambda) \quad \Big] \quad , \tag{5.3.41} $$

$\nu = 2,..,n$ und $p_\lambda = (i_{\lambda+1},..,i_m)$.

Das Glied $\sum_{\varrho=\lambda+1}^{m} (t_{i_\varrho \nu} + r_{i_\varrho \nu})$ in (5.3.41) ist für alle $p \in S_{i_1,..,i_\lambda}$ invariant, es gilt

$$ \sum_{\varrho=\lambda+1}^{m} (t_{i_\varrho \nu} + r_{i_\varrho \nu}) = \sum_{\varrho \in I_\lambda} (t_{\varrho\,\nu} + r_{\varrho\,\nu}) \quad . \tag{5.3.42} $$

Nehmen wir an, daß die Größen ${}^{*}\bar{y}^{3}_{\lambda\,1},..,{}^{*}\bar{y}^{3}_{\lambda\,\nu-1}$ bzw. ${}^{*}\bar{y}^{3}_{\lambda\,1}(i_m),..$ $..,{}^{*}\bar{y}^{3}_{\lambda\,\nu-1}(i_m)$ (entsprechend (5.3.35) bzw. (5.3.36)) bereits

festgelegt sind, so ist aus (5.3.41) ersichtlich, daß die rechte Seite von (5.3.41) eine untere Schranke für die Fertigstellungszeiten $*\bar{z}^3_{i_\lambda v}$ für alle $p \in S_{i_1,..,i_\lambda}$ liefert, wenn die Größe $*\bar{z}^3_{i_\lambda v-1}$ durch $*\bar{y}^3_{\lambda\ v-1}$ und $*\bar{h}_{v-1,1,\lambda}(p_\lambda)$ durch

$$\min\{*\bar{h}_{v-1,1,\lambda}(p_\lambda) \ / \ p_\lambda \in S(I_\lambda)\}$$

ersetzt werden. Ersetzen wir $*\bar{z}^3_{i_\lambda v-1}$ durch $*\bar{y}^3_{\lambda\ v-1}(i_m)$ und $*\bar{h}_{v-1,1,\lambda}(p_\lambda)$ durch

$$\min\{*\bar{h}_{v-1,1,\lambda}(p_\lambda) \ / \ p_\lambda \in S_{i_m}(I_\lambda)\}$$

oder durch

$$\sum_{\varrho \in I_\lambda} (t_{\varrho\ v-1} + r_{\varrho\ v-1}) + t_{i_m\ v} + f_{i_m\ v-1} \quad ,$$

so erhalten wir untere Abschätzungen von $*\bar{z}^3_{i_\lambda v}$ für alle Permutationen $p \in S_{i_m;i_1,..,i_\lambda}$.

Wir bezeichnen

1. $$*\bar{y}^3_{\lambda\ 1} = t_1 + \sum_{\varrho=1}^{\lambda} (t_{i_\varrho 1} + r_{i_\varrho 1}) \quad ; \tag{5.3.43}$$

$$*\bar{y}^3_{\lambda\ v} = \max \Big[\ t_v + \sum_{\varrho=1}^{\lambda} (t_{i_\varrho v} + r_{i_\varrho v}) \quad ,$$

$$*\bar{y}^3_{\lambda\ v-1} + \max_{1 \le l \le \lambda} \Big\{ f_{i_l v-1} + t_{i_l v} + \sum_{\varrho=l+1}^{\lambda} (t_{i_\varrho v} + r_{i_\varrho v} - t_{i_\varrho v-1} - r_{i_\varrho v-1}) \Big\} \ ,$$

$$*\bar{y}^3_{\lambda v-1} + \min\{*\bar{h}_{v-1,1,\lambda}(p_\lambda) \ / \ p_\lambda \in S(I_\lambda)\} - \sum_{\varrho \in I_\lambda} (t_{\varrho\ v} + r_{\varrho\ v}) \ \Big] \quad , \tag{5.3.44}$$

$v = 2,..,n$.

2. $$ {}^{*}\bar{y}^{3}_{\lambda\ 1}(i_m) = t_1 + \sum_{\varrho=1}^{\lambda}(t_{i_\varrho 1} + r_{i_\varrho 1}) \quad , \tag{5.3.45} $$

$$ {}^{*}\bar{y}^{3}_{\lambda\ v}(i_m) = \max \Big[t_v + \sum_{\varrho=1}^{\lambda}(t_{i_\varrho v} + r_{i_\varrho v}) \quad , $$

$$ {}^{*}\bar{y}^{3}_{\lambda\ v-1}(i_m) + \max_{1 \le l \le \lambda} \Big\{ f_{i_l v-1} + t_{i_l\ v} $$

$$ + \sum_{\varrho=l+1}^{\lambda}(t_{i_\varrho v} + r_{i_\varrho v} - t_{i_\varrho v-1} - r_{i_\varrho v-1}) \Big\} \quad , $$

$$ {}^{*}\bar{y}^{3}_{\lambda\ v-1}(i_m) - \sum_{\varrho \in I_\lambda}(t_{\varrho\ v} + r_{\varrho\ v}) $$

$$ + \min \{ {}^{*}\bar{h}_{v-1,1,\lambda}(p_\lambda) \ / \ p_\lambda \in S_{i_m}(I_\lambda) \} \ \Big] \quad , \tag{5.3.46} $$

$v = 2,..,n$.

3. $$ {}^{*}\bar{y}^{3}_{\lambda\ 1}(i_m) = t_1 + \sum_{\varrho=1}^{\lambda}(t_{i_\varrho 1} + r_{i_\varrho 1}) \quad , \tag{5.3.47} $$

$$ {}^{*}\bar{y}^{3}_{\lambda\ v}(i_m) = \max \Big[t_v + \sum_{\varrho=1}^{\lambda}(t_{i_\varrho v} + r_{i_\varrho v}) \quad , $$

$$ {}^{*}\bar{y}^{3}_{\lambda\ v-1}(i_m) + \max_{1 \le l \le \lambda} \Big\{ f_{i_l v-1} + t_{i_l\ v} $$

$$ + \sum_{\varrho=l+1}^{\lambda}(t_{i_\varrho v} + r_{i_\varrho v} - t_{i_\varrho v-1} - r_{i_\varrho v-1}) \Big\} \quad , $$

$$ {}^{*}\bar{y}^{3}_{\lambda\ v-1}(i_m) - \sum_{\varrho \in I_\lambda}(t_{\varrho\ v} + r_{\varrho\ v}) $$

$$ + t_{i_m v} + f_{i_m v-1} + \sum_{\varrho \in I_\lambda}(t_{\varrho\ v-1} + r_{\varrho\ v-1}) \ \Big] , \tag{5.3.48} $$

$v = 2,..,n$.

Vergleichen wir die (rekursiven) Darstellungen (5.3.43) bis (5.3.48) der (verschiedenen) Größen $*\bar{y}^3_{\lambda v}$ und $*\bar{y}^3_{\lambda v}(i_m)$ mit den Darstellungen (5.3.39) und (5.3.40) der Größen $*\bar{x}^3_{\lambda v}$, v=1,..,n , so stellen wir fest, daß die oben definierten Größen $*\bar{y}^3_{\lambda v}$ und $*\bar{y}^3_{\lambda v}(i_m)$ die Beziehung (5.3.35) bzw. (5.3.36) erfüllen.

Aus den rekursiven Darstellungen der Größen $*\bar{y}^3_{\lambda v}$ und $*\bar{y}^3_{\lambda v}(i_m)$, v = 2,..,n , lassen sich leicht analytische Darstellungen dieser Größen ableiten. Z.B. erhalten wir für die Größen $*\bar{y}^3_{\lambda v}(i_m)$ nach (5.3.48) :

$$
\begin{aligned}
*\bar{y}^3_{\lambda v}(i_m) = \max \Big[& t_v + \sum_{\varrho=1}^{\lambda} (t_{i_\varrho v} + r_{i_\varrho v}) \\
& - \sum_{\varrho \in I_\lambda} (t_{\varrho v} + r_{\varrho v}) + \max_{1 \le j \le v-1} \Big\{ t_j + \sum_{\varrho=1}^{m} (t_{\varrho j} \\
& + r_{\varrho j}) + \sum_{k=j}^{v-1} \max \Big[\max_{1 \le l \le \lambda} \Big\{ f_{i_l k} + t_{i_l k+1} \\
& + \sum_{\mu=l+1}^{\lambda} (t_{i_\mu k+1} + r_{i_\mu k+1} - t_{i_\mu k} - r_{i_\mu k}) \Big\} \\
& + \sum_{\mu \in I_\lambda} (t_{\mu k+1} + r_{\mu k+1} - t_{\mu k} - r_{\mu k}) \\
& f_{i_m k} + t_{i_m k+1} \Big] \Big\} \Big] , \qquad (5.3.49)
\end{aligned}
$$

v = 2,..,n .

Aus den Definitionen der Größen $*\bar{y}^3_{\lambda v}$ und $*\bar{y}^3_{\lambda v}(i_m)$ ersehen wir, daß die 2. Möglichkeit ($*\bar{y}^3_{\lambda v}(i_m)$ nach (5.3.45) und (5.3.46)) gegenüber der ersten und dritten Möglichkeit bessere Abschätzungen der Fertigstellungszeiten $*\bar{z}^3_{i_\lambda v}$ für alle Permutationen $p \in S_{i_m; i_1, \ldots, i_\lambda}$, wobei der Index $i_m \in I_\lambda$ beliebig gewählt sei, liefert.

Unter Verwendung der Größen $*\bar{y}^3_{\lambda\,v}$ und $*\bar{y}^3_{\lambda\,v}(i_m)$ können unmittelbar die im Satz 5.3.1 betrachteten Schranken verbessert werden, indem die Größen $*\bar{x}^3_{\lambda\,v}$ durch $*\bar{y}^3_{\lambda\,v}$ bzw. $*\bar{y}^3_{\lambda\,v}(i_m)$ ersetzt werden.

Die folgenden Beziehungen sind bei der Wahl der Zahlen s_v, $v=1,..,n$, zu beachten, wenn zur Konstruktion von Schranken der Form $*\bar{R}^3_{i_1,..,i_\lambda}$ und $*\bar{C}^3_{i_1,..,i_\lambda}$, $\lambda=1,..,m-1$, die Größen $*\bar{y}^3_{\lambda\,v}$ und $*\bar{y}^3_{\lambda\,v}(i_m)$ verwendet werden :

1. Aus (5.3.44) folgt für alle $p \in S_{i_1,..,i_\lambda}$

$$*\bar{y}^3_{\lambda\,v+1} + \sum_{\varrho \in I_\lambda} (t_{\varrho\,v+1} + r_{\varrho\,v+1})$$

$$\geq *\bar{y}^3_{\lambda\,v} + \min \{ *\bar{h}_{v,1,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S(I_\lambda) \} \quad , \qquad (5.3.50)$$

$v = 1,..,n-1$.

2. Es seien die Größen $*\bar{y}^3_{\lambda\,v}(i_m)$, $v=1,..,n$ und $i_m \in I_\lambda$ beliebig gewählt, nach (5.3.45) und (5.3.46) definiert. Für alle $p \in S_{i_m:i_1,..,i_\lambda}$ ergibt sich nach (5.3.46)

$$*\bar{y}^3_{\lambda\,v+1}(i_m) + \sum_{\varrho \in I_\lambda} (t_{\varrho\,v+1} + r_{\varrho\,v+1})$$

$$\geq *\bar{y}^3_{\lambda\,v}(i_m) + \min \{ *\bar{h}_{v,1,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S_{i_m}(I_\lambda) \} \quad , \qquad (5.3.51)$$

$v = 1,..,n-1$.

3. Es seien die Größen $*\bar{y}^3_{\lambda\,v}(i_m)$, $v=1,..,n$ und $i_m \in I_\lambda$ beliebig gewählt, entsprechend (5.3.47) und (5.3.48) festgelegt. Für alle $p \in S_{i_m;i_1,..,i_\lambda}$ gilt nach (5.3.48)

$$*\bar{y}^3_{\lambda\,v+1}(i_m) + \sum_{\varrho \in I_\lambda} (t_{\varrho\,v+1} + r_{\varrho\,v+1})$$

$$\geq *\bar{y}^3_{\lambda\,v}(i_m) + \sum_{\varrho \in I_\lambda} (t_{\varrho\,v} + r_{\varrho\,v}) + t_{i_m v+1} - f_{i_m v} \quad , \qquad (5.3.52)$$

$\nu = 1,..,n-1$.

Werden z.B. die Zahlen ε_ν entsprechend (5.3.25) festgelegt, so stellen wir mit (5.3.52) fest :

$$
\begin{aligned}
{}^{*}\overline{B}^{3}_{i_1,..,i_\lambda} &= \min_{i_m \in I_\lambda} \Big\{ \max_{1 \le \nu \le n} \Big[{}^{*}\overline{y}^{3}_{\lambda\,\nu}(i_m) + \sum_{\eta=\nu+1}^{n} (t_{i_m \eta} + f_{i_m \eta} - 1) \\
&\qquad + \sum_{l \in I_\lambda} (t_{l\,\nu} + r_{l\,\nu}) \Big] \Big\} \\
&= \min_{i_m \in I_\lambda} \Big\{ {}^{*}\overline{y}^{3}{}_{n}(i_m) + \sum_{l \in I_\lambda} (t_{l\,n} + r_{l\,n}) \Big\} \ ,
\end{aligned}
\tag{5.3.53}
$$

wobei die Größen ${}^{*}\overline{y}^{3}_{\lambda\,\nu}(i_m)$, $\nu=1,..,n$, durch (5.3.47) und (5.3.48) gegeben sind. Aus (5.3.53) ersehen wir, daß in diesem Fall nur die Abschätzungen

$$
{}^{*}\overline{y}^{3}_{\lambda\,n}(i_m) + \sum_{l \in I_\lambda} (t_{l\,n} + r_{l\,n}) \quad , \quad i_m \in I_\lambda \quad ,
$$

die Wirksamkeit dieser Schranken beeinflussen. Vergleichen wir die ${}^{*}\overline{B}^{3}$ - Schranke nach (5.3.53) mit derjenigen nach (5.3.26), so erhalten wir, da ${}^{*}\overline{y}^{3}_{\lambda\,\nu}(i_m) \ge {}^{*}\overline{x}^{3}_{\lambda\,\nu}$, $\nu=1,..,n$ und $i_m \in I_\lambda$, ist, daß die ${}^{*}\overline{B}^{3}$ - Schranke nach (5.3.53) besser ist.

Unter Verwendung der oben definierten Größen ${}^{*}\overline{y}^{3}_{\lambda\,n}$ und ${}^{*}\overline{y}^{3}_{\lambda\,n}(i_m)$ können die nachfolgenden einfachen Schranken formuliert werden.

Wir bezeichnen

$$
{}^{*}\overline{E}^{3}_{i_1,..,i_\lambda} = \min_{i_m \in I_\lambda} \Big\{ {}^{*}\overline{y}^{3}_{\lambda\,n}(i_m) \Big\} + \sum_{l \in I_\lambda} (t_{l\,n} + r_{l\,n}) \quad ,
\tag{5.3.54}
$$

wobei ${}^{*}\overline{y}^{3}_{\lambda\,n}(i_m)$ durch (5.3.45) und (5.3.46) gegeben ist,

$$
{}^{*}\overline{F}^{3}_{i_1,..,i_\lambda} = \min_{i_m \in I_\lambda} \Big\{ {}^{*}\overline{y}^{3}{}_{n}(i_m) \Big\} + \sum_{l \in I_\lambda} (t_{l\,n} + r_{l\,n}) \quad ,
\tag{5.3.55}
$$

wobei ${}^{*}\overline{y}^{3}_{\lambda\,n}(i_m)$ durch (5.3.47) und (5.3.48) festgelegt ist,

und

$$ {}^{*}\overline{G}^{3}_{i_1,..,i_\lambda} = {}^{*}\overline{y}^{3}_{\lambda\, n} + \sum_{l \in I_\lambda} (t_{l\, n} + r_{l\, n}) \quad , \tag{5.3.56} $$

wobei ${}^{*}\overline{y}^{3}_{\lambda\, n}$ durch (5.3.43) und (5.3.44) beschrieben ist.

Satz 5.3.2 : Es seien ${}^{*}\overline{E}^{3}_{i_1,..,i_\lambda}$, ${}^{*}\overline{F}^{3}_{i_1,..,i_\lambda}$ und ${}^{*}\overline{G}^{3}_{i_1,..,i_\lambda}$ die durch (5.3.54) bis (5.3.56) definierten Größen, dann gilt für alle Permutationen $p \in S_{i_1,..,i_\lambda}$ ($\lambda = 1,..,m-1$) :

$$ {}^{*}\overline{f}_3(p) \geq {}^{*}\overline{E}^{3}_{i_1,..,i_\lambda} \geq {}^{*}\overline{F}^{3}_{i_1,..,i_\lambda} \quad , \tag{5.3.57} $$

$$ {}^{*}\overline{f}_3(p) \geq {}^{*}\overline{E}^{3}_{i_1,..,i_\lambda} \geq {}^{*}\overline{G}^{3}_{i_1,..,i_\lambda} \quad . \tag{5.3.58} $$

Wenn $\lambda = m-1$ ist, haben wir

$$ {}^{*}\overline{f}_3(p) = {}^{*}\overline{E}^{3}_{i_1,..,i_\lambda} = {}^{*}\overline{F}^{3}_{i_1,..,i_\lambda} = {}^{*}\overline{G}^{3}_{i_1,..,i_\lambda} \quad , \tag{5.3.59} $$

$p \in S_{i_1,..,i_\lambda}$.

Beweis : Den Beweis von (5.3.57) und (5.3.58) führt man analog zum Beweis der Beziehung (5.3.21) im Satz 5.3.1 . Die angegebenen Beziehungen zwischen der ${}^{*}\overline{E}^{3}$ - Schranke und der ${}^{*}\overline{F}^{3}$ - Schranke sowie zwischen der ${}^{*}\overline{E}^{3}$ - Schranke und der ${}^{*}\overline{G}^{3}$ - Schranke ergeben sich aus der unterschiedlichen Konstruktion der Größen ${}^{*}\overline{y}^{3}_{\lambda\, v}$ und ${}^{*}\overline{y}^{3}_{\lambda\, v}(i_m)$.

Für $\lambda = m-1$ sind $S_{i_m;i_1,..,i_\lambda}$ und $S_{i_1,..,i_\lambda}$ einelementig und stimmen überein. Wir erhalten

$$ {}^{*}\overline{E}^{3}_{i_1,..,i_{m-1}} = {}^{*}\overline{y}^{3}_{m-1\ n}(i_m) + t_{i_m n} + r_{i_m\, n} \quad \text{(mit } {}^{*}\overline{y}^{3}_{m-1\ n}(i_m) $$

nach (5.3.45) und (5.3.46)) ,

$$ {}^{*}\overline{F}^{3}_{i_1,..,i_{m-1}} = {}^{*}\overline{y}^{3}_{m-1\ n}(i_m) + t_{i_m n} + r_{i_m n} \quad \text{(mit } {}^{*}\overline{y}^{3}_{m-1\ n}(i_m) $$

nach (5.3.47) und (5.3.48) ,

$$*\overline{C}^3_{i_1,..,i_{m-1}} = *\overline{y}^3_{m-1\ n} + t_{i_m\ n} + r_{i_m\ n} \quad .$$

Vergleichen wir die Darstellungen (5.3.43) bis (5.3.48) der Größen $*\overline{y}^3_{m-1\ v}$ und $*\overline{y}^3_{m-1\ v}(i_m)$, $v=1,..,n$, mit den Darstellungen (5.3.37) und (5.3.41) der Fertigstellungszeiten $*\overline{z}^3_{i_{m-1}\ v}$ für $p \in S_{i_1,..,i_{m-1}}$, so erhalten wir

$$*\overline{z}^3_{i_{m-1}\ v} = *\overline{y}^3_{m-1\ v} = *\overline{y}^3_{m-1\ v}(i_m) \quad .$$

Nach (3.2.29) und (3.2.30) gilt

$$*\overline{f}_3(p) = *\overline{z}^3_{i_m\ n} = *\overline{z}^3_{i_{m-1}\ n} + t_{i_m\ n} + r_{i_m\ n} \quad , \ p \in S_{i_1,..,i_{m-1}} \ .$$

Damit ist der Beweis des Satzes geführt.

Schranken der Form $*\overline{G}^3_{i_1,..,i}$ werden vom Verfasser in [26] zur Lösung spezieller RFP'e des Typs $\overline{RFP}*3$ formuliert.

Im Kapitel 6 wird zur Lösung von Problemen des Typs $\overline{RFP}*3$ die $\overline{F}^3$ - Schranke verwendet.

Hinsichtlich des Aufwandes für die Berechnung der $*\overline{E}^3$ - $*\overline{F}^3$ - und $*\overline{G}^3$ - Schranken können diesen Schranken die nachfolgenden speziellen $*\overline{B}^3$ - und $*\overline{C}^3$ - Schranken gegenübergestellt werden :

$*\overline{E}^3$ - Schranken -- $*\overline{B}^3$ - Schranken mit $s_1=.....=s_{n-1} = 1$

$*\overline{F}^3$ - Schranken -- $*\overline{B}^3$ - Schranken mit $s_1=.....=s_n = 0$

$*\overline{G}^3$ - Schranken -- $*\overline{C}^3$ - Schranken mit $s_v = n-v$,

$v=1,..,n$.

Die $*\overline{E}^3$ - und $*\overline{F}^3$ - Schranken sind den (entsprechenden) gegenübergestellten Schranken vorzuziehen, da sie qualitativ besser sind (vgl. z.B. (5.3.53)).

5.4 Schrankenbildung für $\overline{RFP}$ 1, $\overline{RFP}$ 2 und $\overline{RFP}$ 3

Nach Abschnitt 3.3 kann für $\overline{F}_1(p)$, $p \in S$, die Darstellung

$$\overline{F}_1(p) = \max_{1 \le v \le n} \Big\{ \max_{\overline{L}_{v,n,m}} \Big\{ t_v + \sum_{\mu=v}^{n} \sum_{\lambda=l_{\mu-1}}^{l_\mu} (t_{i_\lambda \mu} + r_{i_{\lambda-1} i_\lambda \mu}) + \sum_{\mu=v}^{n-1} (f_{i_{l_\mu} \mu} - r_{i_{l_\mu - 1}\, i_{l_\mu} \mu+1}) \Big\} \Big\} , \tag{5.4.1}$$

wobei $\overline{L}_{v,n,m}$ durch (3.1.4) definiert ist, angegeben werden.

Es sei $p \in S$ beliebig gewählt.
Unter Verwendung der Teilmengen $\overline{L}_{v,n,m}(s_v) \subseteq \overline{L}_{v,n,m}$ ($v=1,..,n$), die durch (5.3.1) und (5.3.1) festgelegt sind, wird der Zielfunktionswert $\overline{F}_1(p)$ abgeschätzt.

$$\overline{F}_1(p) \ge \max_{\overline{L}_{v,n,m}(s_v)} \Big\{ t_v + \sum_{\mu=v}^{n} \sum_{\lambda=l_{\mu-1}}^{l_\mu} (t_{i_\lambda \mu} + r_{i_{\lambda-1} i_\lambda \mu}) + \sum_{\mu=v}^{n-1} (f_{i_{l_\mu} \mu} - r_{i_{l_\mu - 1}\, i_{l_\mu} \mu+1}) \Big\} .$$

Wir erhalten

$$\overline{F}_1(p) \ge t_v + \sum_{\varrho=1}^{m} (t_{i_\varrho v} + r_{i_{\varrho-1} i_\varrho v}) + \sum_{\eta=v+1}^{n} (t_{i_m \eta} + f_{i_m \eta-1}) ,$$

für $v = 1,..,n$ und $s_v = 0$, sowie (5.4.2)

$$\overline{F}_1(p) \ge t_v + \max_{1 \le l \le m} \Big\{ \sum_{\varrho=1}^{l} (t_{i_\varrho v} + r_{i_{\varrho-1} i_\varrho v}) + \sum_{\mu=v+1}^{v+s_v} (t_{i_1 \mu} + f_{i_1 \mu-1}) + \sum_{\varrho=l+1}^{m} (t_{i_\varrho v+s_v} + r_{i_{\varrho-1} i_\varrho v+s_v}) \Big\} + \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_m \eta} + f_{i_m \eta-1}) , \tag{5.4.3}$$

für $v = 1,..,n-1$ und $s_v = 1,..,n-v$.

ür $\lambda = 0,..,m-1$, $v = 1,..,n$ und $s_v = 0,..,n-v$ definieren wir

$$\bar{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) = \max_{\lambda+1 \le l \le m} \Big\{ \sum_{\varrho=\lambda+1}^{l} (t_{i_\varrho v} + r_{i_{\varrho-1}\, i_\varrho\, v}) + \sum_{\mu=v+1}^{v+s_v} (t_{i_l \mu} + f_{i_l \mu-1}) + \sum_{\varrho=l+1}^{m} (t_{i_\varrho v+s_v} + r_{i_{\varrho-1}\, i_\varrho\, v+s_v}) \Big\} , \tag{5.4.4}$$

obei $p_\lambda = (i_{\lambda+1},..,i_m) \in S(I_\lambda)$ ist.

t prinzipiell den gleichen Überlegungen wie bei der Abeitung der Beziehungen (5.3.10) und (5.3.11) läuft die Heritung der nachstehenden Beziehungen ab.

ür alle Permutationen $p \in S_{i_m;i_1,..,i_\lambda}$ gilt

$$\bar{f}_\alpha(p) \ge \bar{x}^\alpha_{\lambda v} + \min \{ \bar{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S_{i_m}(I_\lambda) \} + \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_m \eta} + f_{i_m \eta-1}) \tag{5.4.5}$$

$$\ge \bar{x}^\alpha_{\lambda v} + \min \{ \bar{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S(I_\lambda) \} + \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_m \eta} + f_{i_m \eta-1}) \quad , \tag{5.4.6}$$

$\alpha = 1, 2, 3$, $v = 1,..,n$, $s_v = 0,..,n-v$, $\lambda = 1,..,m-1$) .

ir betrachten die Minima

$$\min \{ \bar{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S_{i_m}(I_\lambda) \} \quad , i_m \in I_\lambda \ , \tag{5.4.7}$$

nd

$$\min \{ \bar{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S(I_\lambda) \} \tag{5.4.8}$$

uf den rechten Seiten von (5.4.5) und (5.4.6) .

m Gegensatz zur Bestimmung der Minima (5.3.14) und (5.3.15) st die Bestimmung von Minima der Form (5.4.7) und (5.4.8) mit rheblichen Schwierigkeiten verbunden.
alls $s_\nu = 0$ ist, haben wir für $\bar{h}_{\nu,s_\nu,\lambda}(p_\lambda)$

$$\bar{h}_{\nu,0,\lambda}(p_\lambda) = \sum_{l \in I_\lambda} t_{l\,\nu} + \sum_{\varrho=\lambda+1}^{m} r_{i_{\varrho-1}\,i_\varrho\,\nu} \quad .$$

ie Summe $\sum_{l \in I_\lambda} t_{l\,\nu}$ ist für alle $p \in S_{i_1,..,i_\lambda}$ invariant. Daher ilt es bei der Bestimmung von Minima der Form (5.4.7) und 5.4.8) (spezielle) Rundreiseprobleme zu lösen.
ur Ermittlung von (5.4.8) ist ein Rundreiseproblem, der im bschnitt 3.4 betrachteten Gestalt, mit der "Distanzmatrix"

$$\tilde{R}_\nu(I_\lambda) = (\tilde{r}_{i\,j})_{m-\lambda+1,m-\lambda+1} \qquad (5.4.9)$$

u lösen, wobei die Zahlen $\tilde{r}_{i\,j}$,($i,j \in I_{\lambda-1}$ und $i \neq j$), wie olgt festgelegt sind :

$\tilde{r}_{i\,j} = 0$ für $i \in I_\lambda$ und $j = i_\lambda$,

$\tilde{r}_{i\,j} = r_{i\,j\,\nu}$ sonst .

ur Ermittlung von (5.4.7) ist ein Rundreiseproblem mit der Distanzmatrix"

$$\hat{R}_\nu(I_\lambda,i_m) = (\hat{r}_{i\,j})_{m-\lambda,m-\lambda} \quad , (\text{für } \lambda = 1,..,m-2) \quad , \qquad (5.4.10)$$

u lösen, wobei die Zahlen $\hat{r}_{i\,j}$,($i \in I_{m,\lambda-1}$, $j \in I_\lambda$, $i \neq j$ und $\neq i_\lambda$, falls $j = i_m$ ist), als $\hat{r}_{i\,j} = r_{i\,j\,\nu}$ festgelegt sind das Matrixelement $\hat{r}_{i_\lambda\,i_m}$ ist allerdings nicht definiert) .
ei einem derartigen Rundreiseproblem sind als "Startort" i_λ nd als "Zielort" i_m fest vorgegeben. Es ist eine optimale inimale) "Reise" $(i_\lambda,i^*_{\lambda+1}),(i^*_{\lambda+1},i^*_{\lambda+2}),..,(i^*_{m-1},i_m)$ vom Startort" i_λ zum "Zielort" i_m zu bestimmen, wobei jeder der Orte" $i \in I_{m,\lambda}$ genau einmal zu bereisen ist.

enn $(i_\lambda, i^*_{\lambda+1}),(i^*_{\lambda+1},i^*_{\lambda+2}),..,(i^*_{m-1},i_m)$ eine optimale "Reise" st, so gilt für $p^*_\lambda = (i^*_{\lambda+1},..,i^*_{m-1},i_m)$:

$$\bar{h}_{v,0,\lambda}(p^*_\lambda) = \min\{\ \bar{h}_{v,0,\lambda}(p_\lambda) \ /\ p_\lambda \in S_{i_m}(I_\lambda)\ \} \ .$$

ur Lösung dieser beiden speziellen Probleme eignen sich alle erfahren, die auch für das klassische Rundreiseproblem anendbar sind (vgl. [30] , S. 136 ff.). Dazu gehören die in 25], [30] und [32] beschriebenen Verfahren der kombinatorischn Analyse.

alls $s_v > 0$ ist, ist bei der Bestimmung von (5.4.8) ein fiktives Reihenfolgeproblem des Typs $\overline{RFP}$ 1 mit zwei Maschinen zu ösen. Die im Abschnitt 5.2 betrachtete einfache Lösungsmöglichkeit ist nicht anwendbar. Es sind z.B. selbst Verfahren der ombinatorischen Analyse heranzuziehen (vgl. [6]).

ir definieren für alle Indizes $i \in I_\lambda$

$$r_{i\,v} = \min_{\substack{j \in I_{\lambda-1} \\ j \neq i}} r_{j\,i\,v} \quad , \ v = 1,..,n \quad . \tag{5.4.11}$$

ach (5.4.11) gilt für alle $p_\lambda \in S(I_\lambda)$:

$$r_{i_\varrho\, v} \leq r_{i_{\varrho-1}\, i_\varrho\, v} \quad , \tag{5.4.12}$$

$\varrho = \lambda+1,..,m$ und $v = 1,..,n$.

us (5.4.12) und der Darstellung (5.4.4) für $\bar{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda)$ folgt, aß wir die Minima (5.4.7) und (5.4.8) folgendermaßen abchätzen können :

$$\min\{\ \bar{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \ /\ p_\lambda \in S_{i_m}(I_\lambda)\ \}$$

$$\geq \min\{\ {}^*\bar{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \ /\ p_\lambda \in S_{i_m}(I_\lambda)\ \} \quad , \tag{5.4.13}$$

$$\min \{ \bar{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S(I_\lambda) \}$$

$$\geq \min \{ {}^*\bar{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S(I_\lambda) \} \quad , \qquad (5.4.14)$$

($v=1,..,n$, $s_v=0,..,n-v$ und $\lambda=1,..,m-1$), wobei ${}^*\bar{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda)$, mit den Rüstzeiten $r_{i\,v}$ und $r_{i\,v+s_v}$ nach (5.4.11), $i \in I_\lambda$, durch (5.3.7) definiert ist.
Die Minima von ${}^*\bar{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda)$ in (5.4.13) und (5.4.14) können analog wie im Abschnitt leicht bestimmt werden.

Anstelle von (5.4.5) und (5.4.6) können wir schreiben :
Für alle Permutationen $p \in S_{i_m;i_1,..,i_\lambda}$ gilt

$$\bar{f}_\alpha(p) \geq \bar{x}^\alpha_{\lambda v} + \min \{ {}^*\bar{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S_{i_m}(I_\lambda) \}$$

$$+ \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_m\eta} + f_{i_m\eta-1}) \qquad (5.4.15)$$

$$\geq \bar{x}^\alpha_{\lambda v} + \min \{ {}^*\bar{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S(I_\lambda) \}$$

$$+ \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_m\eta} + f_{i_m\eta-1}) \qquad (5.4.16)$$

($\alpha = 1, 2, 3$, $v = 1,..,n$, $s_v = 0,..,n-v$, $\lambda = 1,..,m-1$), wobei die Rüstzeiten in ${}^*\bar{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda)$ entsprechend (5.4.11) gewählt sind.

Mit (5.4.15) und (5.4.16) liegen leicht bestimmbare untere Abschätzungen von $\bar{f}_\alpha(p)$ für alle $p \in S_{i_m;i_1,..,i_\lambda}$ vor. Sie können analog wie im Abschnitt 5.3 zur Schrankenbildung herangezogen werden.

Es seien $s_v \in \{0,..,n-v\}$ $(v=1,..,n)$ und die Rüstzeiten $r_{i\,\mu}$ ($i \in I_\lambda$ und $\mu = 1,..,n$) durch (5.4.11) definiert.

Wir bezeichnen

$$\overline{B}^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda} = \min_{i_m \in I_\lambda} \Big\{ \max_{1\le v\le n} \Big[\overline{x}^{\alpha}_{\lambda v} + \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_m \eta} + f_{i_m \eta-1}) + \min\{ {}^{*}\overline{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S_{i_m}(I_\lambda) \} \Big] \Big\}, \tag{5.4.17}$$

$$\overline{C}^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda} = \min_{i_m \in I_\lambda} \Big\{ \max_{1\le v\le n} \Big[\overline{x}^{\alpha}_{\lambda v} + \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_m \eta} + f_{i_m \eta-1}) + \min\{ {}^{*}\overline{h}_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S(I_\lambda) \} \Big] \Big\}, \tag{5.4.18}$$

für $\alpha = 1$, 2 und $\lambda = 1,..,m-1$ sowie für $\alpha = 3$ und $\lambda = 1,..,m-2$;

$$\overline{B}^{3}_{i_1,..,i_{m-1}} = \overline{C}^{3}_{i_1,..,i_{m-1}} = \overline{F}_3(p) \quad , \; p \in S_{i_1,..,i_{m-1}} . \tag{5.4.19}$$

<u>Satz 5.4.1</u> : Es seien $\overline{B}^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda}$ und $\overline{C}^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) die durch (5.4.17) bis (5.4.19) definierten Größen, dann gilt für alle $p \in S_{i_1,..,i_\lambda}$ ($\lambda = 1,..,m-1$) :

$$\overline{F}_\alpha(p) \ge \overline{B}^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda} \ge \overline{C}^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda} . \tag{5.4.20}$$

Wenn $\lambda = m-1$ ist, haben wir

$$\overline{F}_\alpha(p) = \overline{B}^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda} = \overline{C}^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda} \quad , \; p \in S_{i_1,..,i_\lambda} . \tag{5.4.21}$$

Den Beweis führt man analog zum Beweis von Satz 5.3.1 . Dabei ist zu beachten, daß für $\lambda = m-1$ gilt

$$r_{i_m\, v} = r_{i_{m-1}\, i_m\, v} \quad , \; v = 1,..,n .$$

Bezüglich der Abhängigkeit des Berechnungsaufwandes und der Güte der $\overline{B}^{\alpha}$ - und $\overline{C}^{\alpha}$ - Schranken von der Wahl der Zahlen s_v, $v=1,..,n$, können die im vorhergehenden Abschnitt getroffenen Aussagen (über die entsprechenden $^*\overline{B}^{\alpha}$ - Schranken und $^*\overline{C}^{\alpha}$-Schranken) übertragen werden.

Es sei bemerkt, daß in [6] "Branch and Bound" - Verfahren angegeben sind, bei denen $\overline{B}^{\alpha}$ - Schranken mit den Zahlen $s_v = 0$, $v=1,..,n$, verwendet werden.

Anstelle der Abschätzungen (5.4.15) und (5.4.16) können natürlich unmittelbar die Ausdrücke auf den rechten Seiten von (5.4.5) und (5.4.6) zur Bildung unterer Schranken herangezogen werden. Auf die Angabe derartiger Schranken wird verzichtet.

Es sei erwähnt, daß in [6] spezielle Schranken angeführt sind, bei deren Berechnung Minima der Form (5.4.8) zu bestimmen sind. Da gewöhnlich die Lösung von Rundreiseproblemen und "Zwei-Maschinen - Problemen" des Typs $\overline{F|F}|1$ mit einem vertretbaren Aufwand nicht gesichert werden kann, besitzen derartige Schranken nur eine geringe Bedeutung.

5.5 Schrankenbildung für RFP* 1, RFP* 2 und RFP* 3

Für $^*f_1(p)$, $p \in S$, haben wir nach (3.3.1)

$$^*f_1(p) = \max_{1 \le v \le n} \Big\{ \max_{L_{v,n,m}} \Big\{ t_v + \sum_{\mu=v}^{n} \sum_{\lambda=l_{\mu-1}}^{l_\mu} (t_{i_\lambda \mu} + r_{i_\lambda \mu}) + \sum_{\mu=v}^{n-1} (f_{i_{l_\mu} \mu} - r_{i_{l_\mu} \mu+1}) \Big\} \Big\} \quad , \quad (5.5.1)$$

wobei die Mengen $L_{v,n,m}$, $v=1,..,n$, durch (3.1.3) (für die Permutation p) definiert sind.

Es sei $p \in S$ beliebig gewählt. Analog zum Abschnitt 5.3 definieren wir Teilmengen $L_{v,n,m}(s_v) \subseteq L_{v,n,m}$:

$$L_{v,n,m}(s_v) = \{ (l_{v-1},..,l_n) \in L_{v,n,m} \;/\; l_v=...=l_n = \overline{l}(v) \} \quad , \quad (5.5.2)$$

für $v = 1,..,n$ und $s_v = 0$;

$$L_{v,n,m}(s_v) = \{ (l_{v-1},..,l_n) \in L_{v,n,m} \,/\, l_v=....=l_{v+s_v-1} = 1 \,,$$

$$l_{v+s_v}=....=l_n = \bar{I}(v+s_v) \} \quad ,(5.5.3)$$

für $v = 1,..,n-1$, $s_v = 1,..,n-v$ und $\mathfrak{M}_v \cap \mathfrak{M}_{v+s_v} \neq \phi$.

Die Bezeichnung $\bar{I}(\mu)$ ($\mu=1,..,n$) in (5.5.2) und (5.5.3) wurde im Abschnitt 3.1 eingeführt.

Für eine beliebig gewählte Permutation $p \in S$ gilt ($v=1,..,n$, $s_v=0,..,n-v$) :

Die Menge $L_{v,n,m}(s_v)$ ist genau dann nicht leer, wenn der Durchschnitt der Mengen $\mathfrak{M}_v$ und $\mathfrak{M}_{v+s_v}$ nicht leer ist.

Es seien $\mathfrak{M}_v \cap \mathfrak{M}_{v+s_v} \neq \phi$ und $p \in S$ beliebig gewählt.

Aus (5.5.1) bis (5.5.3) folgt

$$*f_1(p) \geq \max_{L_{v,n,m}(s_v)} \{ t_v + \sum_{\mu=v}^{n} \sum_{\lambda=l_{\mu-1}}^{l_\mu} (t_{i_\lambda \mu} + r_{i_\lambda \mu}) + \sum_{\mu=v}^{n-1} (f_{i_{l_\mu} \mu} - r_{i_{l_\mu} \mu+1}) \} \quad .$$

Wir erhalten

$$*f_1(p) \geq t_v + \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_{\bar{I}(v+s_v)} \eta} + f_{i_{\bar{I}(v+s_v)} \eta-1})$$

$$+ \max_{\substack{1 \leq l \leq \bar{I}(v+s_v) \\ i_l \in \mathfrak{M}_v \cap \mathfrak{M}_{v+s_v}}} \{ \sum_{\varrho=1}^{l} (t_{i_\varrho v} + r_{i_\varrho v}) + \sum_{\mu=v+1}^{v+s_v} (t_{i_l \mu} + f_{i_l \mu-1}) + \sum_{\varrho=l+1}^{\bar{I}(v+s_v)} (t_{i_\varrho v+s_v} + r_{i_\varrho v+s_v}) \} \quad ,$$

(5.5.4)

ür $v = 1,..,n-1$, $s_v = 1,..,n-v$ und $\mathfrak{M}_v \cap \mathfrak{M}_{v+s_v} \neq \phi$;

$$f_1(p) \geq t_v + \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_{I(v)}\eta} + f_{i_{I(v)}\eta-1}) + \sum_{\varrho=1}^{I(v)} (t_{i_\varrho v} + r_{i_\varrho v}) \quad , \quad (5.5.5)$$

ür $v = 1,..,n$, $s_v = 0$ (und $\mathfrak{M}_v \neq \phi$) .

ür die im Abschnitt 5.3 betrachteten Mengen $\bar{L}_{v,n,m}(s_v)$ haen wir $\bar{L}_{v,n,m}(0) \subset \bar{L}_{v,n.m}(s_v)$, für $v=1,..,n-1$ und $s_v = 1,..,n-v$. Nach (5.5.2) und (5.5.3) ist klar, daß im allgemeinen ine derartige Beziehung für die Mengen $L_{v,n,m}(0)$ und $_{v,n,m}(s_v)$, $v=1,..,n-1$, $s_v=1,..,n-v$ und $\mathfrak{M}_v \cap \mathfrak{M}_{v+s_v} \neq \phi$, icht erfüllt ist.
eher gilt im allgemeinen nicht, daß die rechte Seite von 5.5.4) gegenüber der rechten Seite von (5.5.5) immer eine bessere Abschätzung von $^*f_1(p)$, $p \in S$ festgewählt , bildet. Wenn er Durchschnitt der (nichtleeren) Mengen $\bar{L}_{v,n,m}(0)$ und $_{v,n,m}(s_v)$, $s_v > 0$, leer ist, so kann die Abschätzung entprechend (5.5.5) sogar besser sein.
s ist jedoch zu beachten, daß, im Gegensatz zu einer Abschätung des Zielfunktionswertes nach (5.5.4), bei einer Abschätzung on $^*f_1(p)$ entsprechend (5.5.5) (es ist $s_v=0$) stets nur ein ximierungsglied aus der Darstellung (5.5.1) von $^*f_1(p)$ verendet wird.

ie folgenden Bezeichnungen werden eingeführt :

$\mathfrak{M}_v(I_\lambda)$, $(v=1,..,n)$, ist die Indexmenge der Aufträge A_i , die nach der Bearbeitung der Aufträge $A_{i_1},..,A_{i_\lambda}$ auf der Maschine M_v, auf dieser Maschine zu fertigen sind, d.h.

$$\mathfrak{M}_v(I_\lambda) = \mathfrak{M}_v \cap I_\lambda \quad ; \quad (5.5.6)$$

$$
{}^{*}h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) = \max_{\substack{\lambda+1 \le l \le m \\ i_l \in \mathfrak{M}_v(I_\lambda) \cap \mathfrak{M}_{v+s_v}(I_\lambda)}} \Big\{ \sum_{\varrho=\lambda+1}^{l} (t_{i_\varrho v} + r_{i_\varrho v}) + \sum_{\mu=v+1}^{v+s_v} (t_{i_l \mu} + f_{i_l \mu-1}) + \sum_{\varrho=l+1}^{m} (t_{i_\varrho v+s_v} + r_{i_\varrho v+s_v}) \Big\}
$$

$$
= \max_{\substack{\lambda+1 \le l \le m \\ i_l \in \mathfrak{M}_v(I_\lambda) \cap \mathfrak{M}_{v+s_v}(I_\lambda)}} \Big\{ \sum_{\varrho=\lambda+1}^{l} (t_{i_\varrho v} + r_{i_\varrho v}) + f_{i_l v} - r_{i_l v+s_v} + \sum_{\mu=v+1}^{v+s_v-1} (t_{i_l \mu} + f_{i_l \mu}) + \sum_{\varrho=l}^{m} (t_{i_\varrho v+s_v} + r_{i_\varrho v+s_v}) \Big\} \quad , \qquad (5.5.7)
$$

für $\lambda = 0,..,m-1$, $v = 1,..,n$, $s_v = 0,..,n-v$ und
$\mathfrak{M}_v(I_\lambda) \cap \mathfrak{M}_{v+s_v}(I_\lambda) \neq \phi$, wobei $p_\lambda = (i_{\lambda+1},..,i_m) \in S(I_\lambda)$ ist.

eachten wir, daß für Aufträge, die auf einer Maschine M_k nicht u bearbeiten sind, die dazugehörenden Bearbeitungs- und Rüst-eiten als Null vereinbart sind, so kann unter Verwendung der ben eingeführten Bezeichnungen für (5.5.4) und (5.5.5) ge-chrieben werden :

$$
{}^{*}f_1(p) \ge t_v + \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_{I(v+s_v)}\eta} + f_{i_{I(v+s_v)}\eta-1}) + {}^{*}h_{v,s_v,0}(p_0) \quad , \; p_0 = p \quad , \qquad (5.5.8)
$$

$v = 1,..,n$, $s_v = 0,..,n-v$ und $\mathfrak{M}_v(I_\lambda) \cap \mathfrak{M}_{v+s_v}(I_\lambda) \neq \phi$).

ntsprechend den Betrachtungen im Abschnitt 5.1 kann die Beiehung (5.5.8) wie folgt verallgemeinert werden :

ür $p \in S_{i_1,..,i_\lambda}$ $(\lambda = 1,..,m-1)$ beliebig gewählt und
$_\lambda = (i_{\lambda+1},..,i_m)$ gilt

$$*f_\lambda(p) \geq *x^\alpha_{\lambda v} + \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_{I(v+s_v)}\eta} + f_{i_{I(v+s_v)}\eta-1}) + *h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \quad , \tag{5.5.9}$$

$\alpha = 1, 2, 3$; $v \in \mathcal{A}(I_\lambda)$, $s_v = 0,..,n-v$ und $\mathcal{M}_v(I_\lambda) \cap \mathcal{M}_{v+s_v}(I_\lambda) \neq \phi$) .

ie Indexmenge $\mathcal{A}(I_\lambda)$ und die Größen $*x^\alpha_{\lambda v}$, $v=1,..,n$, in 5.5.9) sind im Abschnitt 5.1 definiert.

emerkung 5.5.1 : Es sei darauf hingewiesen, daß die obige Verllgemeinerung im Hinblick auf die Betrachtungen im Abschnitt .1 nicht exakt ist.
ei der Definition der Funktionen $*g_\alpha(p_\lambda \,/\, *x^\alpha_{\lambda k}$, $k \in \mathcal{A}(I_\lambda))$, $_\lambda \in S(I_\lambda)$, werden nur die Maschinen M_k mit $k \in \mathcal{A}(I_\lambda)$ betrachtet.
n den Ausdrücken $*h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda)$ und

$$\sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_{I(v+s_v)}\eta} + f_{i_{I(v+s_v)}\eta-1}) \tag{5.5.10}$$

önnen jedoch Bearbeitungszeiten $t_{i\,k}$, Rüstzeiten $r_{i\,k}$ und ransportzeiten $f_{i\,k}$, $i \in I_\lambda$, auftreten, wobei $k \in \mathcal{L}(I_\lambda)$ ist.
an müßte z.B. für (5.5.10) genauer schreiben

$$\sum_{\substack{\eta=v+s_v+1 \\ \eta \in \mathcal{A}(I_\lambda)}}^{n} (t_{i_{I(v+s_v)}\eta} + f_{i_{I(v+s_v)}\eta-1}) \quad .$$

a für $k \in \mathcal{L}(I_\lambda)$ die Größen $r_{i\,k}$, $t_{i\,k}$ und $f_{i\,k}$, $i \in I_\lambda$, als ill vereinbart sind, überzeugt man sich leicht davon, daß ie Beziehung (5.5.9) richtig ist.

alls $s_v = 0$, $v \in \mathcal{A}(I_\lambda)$, gewählt wird, ist

$$^*h_{v,0,\lambda}(p_\lambda) = \sum_{l \in I_\lambda} (t_{l\,v} + r_{l\,v}) \qquad (5.5.11)$$

ür alle Permutationen $p \in S_{i_1,..,i_\lambda}$ invariant.

alls $s_v > 0$, $\mathfrak{M}_v(I_\lambda) \cap \mathfrak{M}_{v+s_v}(I_\lambda) \neq \phi$, gewählt wird, be-
itzt $^*h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda)$ die Form der im Abschnitt 5.2 betrachteten
ielfunktionen.
inima der Form

$$\min \{ ^*h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S(I_\lambda) \} \qquad (5.5.12)$$

nd

$$\min \{ ^*h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S_{i_m}(I_\lambda) \} \quad , \; i_m \in I_\lambda \; , \qquad (5.5.13)$$

önnen, wie im Abschnitt 5.2 beschrieben wurde, leicht er-
ittelt werden. Die (fiktiven) Bearbeitungszeiten $t''_{i\,1}$ und
$''_{i\,2}$ für die Aufträge A_i , die sowohl auf der Maschine M_v als
uch auf der Maschine M_{v+s_v} zu bearbeiten sind, ergeben sich
ach (5.5.7) zu :

$$t''_{i\,1} = t_{i\,v} + r_{i\,v} + f_{i\,v} - r_{i\,v+s_v} + \sum_{\mu=v+1}^{v+s_v-1} (t_{i\,\mu} + f_{i\,\mu}) \quad ,$$

$$t''_{i\,2} = f_{i\,v} + \sum_{\mu=v+1}^{v+s_v-1} (t_{i\,\mu} + f_{i\,\mu}) + t_{i\,v+s_v} \quad , \qquad (5.5.14)$$

$\in \mathfrak{M}_v(I_\lambda) \cap \mathfrak{M}_{v+s_v}(I_\lambda)$.

amit können die Aufträge, die auf mindestens einer der Ma-
chinen M_v und M_{v+s_v} zu bearbeiten sind, entsprechend (a), (b)
nd (c) (s.h. S. 54) angeordnet werden. Sind Aufträge zu be-
ücksichtigen, die auf den beiden Maschinen M_v und M_{v+s_v} nicht
u fertigen sind, so können sie an beliebiger Stelle angeordnet
erden. Bei der Ermittlung einer optimalen Auftragsfolge für
ie Bestimmung von (5.5.13) sind diese Aufträge vor dem Auftrag
$_m$ (der festgelegt ist) anzuordnen.

ür eine beliebig gewählte Permutation $p \in S_{i_1,..,i_\lambda}$, $\lambda = 1,..$
$.,m-1$, und $v \in \mathcal{O}(I_\lambda)$ ist $i_{I(v)} \in \mathfrak{M}_v(I_\lambda)$. Falls $i_m \in \mathfrak{M}_v(I_\lambda)$
ist, gilt $i_m = i_{I(v)}$.

us (5.5.9) folgt :

Falls $i_m \in \mathfrak{M}_{v+s_v}(I_\lambda)$ ist, gilt für alle $p \in S_{i_m;i_1,..,i_\lambda}$

$$
\begin{aligned}
{}^*f_\alpha(p) &\geq {}^*x^\alpha_{\lambda v} + \min\{\, {}^*h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \;/\; p_\lambda \in S_{i_m}(I_\lambda) \,\} \\
&\quad + \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_m \eta} + f_{i_m \eta-1}) \qquad (5.5.15) \\
&\geq {}^*x^\alpha_{\lambda v} + \min\{\, {}^*h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \;/\; p_\lambda \in S(I_\lambda) \,\} \\
&\quad + \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_m \eta} + f_{i_m \eta-1}) \quad , \qquad (5.5.16)
\end{aligned}
$$

($\alpha = 1, 2, 3$; $v \in \mathcal{O}(I_\lambda)$, $s_v = 0,..,n-v$ und
$\mathfrak{M}_v(I_\lambda) \cap \mathfrak{M}_{v+s_v}(I_\lambda) \neq \phi$) .

Für alle $p \in S_{i_1,..,i_\lambda}$ gilt

$$
\begin{aligned}
{}^*f_\alpha(p) &\geq {}^*x^\alpha_{\lambda v} + \min\{\, {}^*h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \;/\; p_\lambda \in S(I_\lambda) \,\} \\
&\quad + \min_{i \in \mathfrak{M}_{v+s_v}(I_\lambda)} \Big\{ \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i\,\eta} + f_{i\,\eta-1}) \Big\}^{+)} , \qquad (5.5.17)
\end{aligned}
$$

($\alpha = 1, 2, 3$; $v \in \mathcal{O}(I_\lambda)$, $s_v = 0,..,n-v$ und
$\mathfrak{M}_v(I_\lambda) \cap \mathfrak{M}_{v+s_v}(I_\lambda) \neq \phi$) .

+) Wenn $s_v = n-v$ ist, sei dieser Ausdruck als Null definiert.

enn $\mathfrak{L}(I_\lambda) \neq \phi$ ist, erhalten wir nach Abschnitt 5.1 (insbe-
ondere Beziehung (5.1.4)) für alle $p \in S_{i_1,..,i_\lambda}$

$$ {}^*f_\alpha(p) \geq \max_{v \in \mathfrak{L}(I_\lambda)} {}^*x^\alpha_{\lambda v} , \qquad (5.5.18) $$

$\alpha = 1, 2, 3$ und $\lambda = 1,..,m-1$) .

ie Abschätzungen (5.5.15) bis (5.5.18) werden nachfolgend zur
onstruktion unterer Schranken verwendet.

sei zu jedem Index $v \in \mathcal{A}(I_\lambda)$ eine Zahl $s_v \in \{0,..,n-v\}$ mit

$$ \mathfrak{M}_v(I_\lambda) \cap \mathfrak{M}_{v+s_v}(I_\lambda) \neq \phi \qquad (5.5.19) $$

eliebig gewählt.

ir bezeichnen

$$ {}^*v^\alpha_{i_1,..,i_\lambda} = \begin{cases} \max\limits_{v \in \mathfrak{L}(I_\lambda)} {}^*x^\alpha_{\lambda v} & \text{, falls } \mathfrak{L}(I_\lambda) \neq \phi \text{ ist} \\ 0 & \text{, andernfalls} \end{cases} \qquad (5.5.20) $$

$$ {}^*w_{\lambda,v,s_v}(i_m) = \begin{cases} \min\{ {}^*h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \;/\; p_\lambda \in S_{i_m}(I_\lambda) \} \\ \quad + \sum\limits_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_m \eta} + f_{i_m \eta-1}) \quad \text{, falls } i_m \in \mathfrak{M}_{v+s_v}(I_\lambda) \\ \min\{ {}^*h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \;/\; p_\lambda \in S(I_\lambda) \} \\ \quad + \min\limits_{i \in \mathfrak{M}_{v+s_v}(I_\lambda)} \left\{ \sum\limits_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i\,\eta} + f_{i\,\eta-1}) \right\} , \\ \qquad \text{falls } i_m \notin \mathfrak{M}_{v+s_v}(I_\lambda) \text{ ist} \end{cases} \qquad (5.5.21) $$

$$
{}^{*}R_{\lambda,v,s_v}(i_m) = \begin{cases} \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_m\eta} + f_{i_m\eta-1}) \text{ , falls } i_m \in \mathfrak{M}_{v+s_v}(I_\lambda) \text{ ist} \\ \min\limits_{i \in \mathfrak{M}_{v+s_v}(I_\lambda)} \left\{ \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i\eta} + f_{i\eta-1}) \right\} \text{ , andernfalls} \end{cases}
$$

(5.5.22)

$$
{}^{*}R^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda} = \max \Big[{}^{*}V^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda} \text{ , } \min_{i_m \in I_\lambda} \Big\{ \max_{v \in \mathfrak{A}(I_\lambda)} \{ {}^{*}x^{\alpha}_{\lambda v} + {}^{*}W_{\lambda,v,s_v}(i_m) \} \Big\} \Big]
$$

(5.5.23)

$$
{}^{*}C^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda} = \max \Big[{}^{*}V^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda} \text{ , } \min_{i_m \in I_\lambda} \Big\{ \max_{v \in \mathfrak{A}(I_\lambda)} \{ {}^{*}x^{\alpha}_{\lambda v} + {}^{*}R_{\lambda,v,s_v}(i_m) + \min \{ {}^{*}h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S(I_\lambda) \} \} \Big\} \Big]
$$

(5.5.24)

$$
{}^{*}K^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda} = \max \Big[{}^{*}V^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda} \text{ , } \max_{v \in \mathfrak{A}(I_\lambda)} \{ {}^{*}x^{\alpha}_{\lambda v} + \min \{ {}^{*}h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S(I_\lambda) \} + \min_{i \in \mathfrak{M}_{v+s_v}(I_\lambda)} \left\{ \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i\eta} + f_{i\eta-1}) \right\} \} \Big]
$$

(5.5.25)

für $\alpha = 1, 2$ und $\lambda = 1,..,m-1$ sowie für $\alpha = 3$ und $\lambda = 1,..,m-2$;

$$ {}^{*}\eta^{3}_{i_1,\dots,i_{m-1}} = {}^{*}\sigma^{3}_{i_1,\dots,i_{m-1}} = {}^{*}\chi^{3}_{i_1,\dots,i_{m-1}} = {}^{*}f_3(p) \,, $$

$$ p \in \mathfrak{S}_{i_1,\dots,i_{m-1}} \,. \tag{5.5.26} $$

<u>Satz 5.5.1</u> : Es seien ${}^{*}\eta^{\alpha}_{i_1,\dots,i_\lambda}$, ${}^{*}\sigma^{\alpha}_{i_1,\dots,i_\lambda}$ und ${}^{*}\chi^{\alpha}_{i_1,\dots,i_\lambda}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) die durch (5.5.23) bis (5.5.25) definierten Größen, dann gilt für alle $p \in \mathfrak{S}_{i_1,\dots,i_\lambda}$ ($\lambda = 1,\dots,m-1$) :

$$ {}^{*}f_\alpha(p) \geq {}^{*}\eta^{\alpha}_{i_1,\dots,i_\lambda} \geq {}^{*}\sigma^{\alpha}_{i_1,\dots,i_\lambda} \geq {}^{*}\chi^{\alpha}_{i_1,\dots,i_\lambda} \,. \tag{5.5.27} $$

Wenn $\lambda = m-1$ ist, ergibt sich

$$ {}^{*}f_\alpha(p) = {}^{*}\eta^{\alpha}_{i_1,\dots,i_\lambda} = {}^{*}\sigma^{\alpha}_{i_1,\dots,i_\lambda} = {}^{*}\chi^{\alpha}_{i_1,\dots,i_\lambda} \,, \quad p \in \mathfrak{S}_{i_1,\dots,i_\lambda} \,. \tag{5.5.28} $$

<u>Beweis</u> : Die Gültigkeit von (5.5.27) folgt mit

$$ \mathfrak{S}_{i_1,\dots,i_\lambda} = \bigcup_{i_m \in I_\lambda} \mathfrak{S}_{i_m;i_1,\dots,i_\lambda} $$

aus den Abschätzungen (5.5.15) bis (5.5.17), die bei der Bildung der betrachteten Schranken verwendet wurden.

Für $\lambda = m-1$ stimmen die einelementigen Klassen $\mathfrak{S}_{i_1,\dots,i_{m-1}}$ und $\mathfrak{S}_{i_{m-1};i_1,\dots,i_{m-1}}$ überein. Aber (5.5.24) ist (5.5.28) für $\lambda = 2$ erfüllt. Für $\alpha = 1$ und $\alpha = 2$ entsteht aus (5.5.25)

$$ {}^{*}\eta^{\alpha}_{i_1,\dots,i_{m-1}} = \max \Big[{}^{*}\eta^{\alpha}_{i_1,\dots,i_{m-1}} \,, $$

$$ \max_{\nu \in \mathfrak{A}(I_{m-1})} \Big\{ {}^{*}\eta^{\alpha}_{m-1\ \nu} + t_{i_m \nu} + r_{i_m \nu} + \sum_{\mu=\nu+1}^{n} (t_{i_m \mu} + r_{i_m \mu-1}) \Big\} \Big] \,. \tag{5.5.29} $$

Wegen (5.1.5) gilt für $p \in \mathfrak{S}_{i_1,\dots,i_{m-1}}$:

$$ {}^{*}\eta^{\alpha}_{m-1\ \nu} = {}^{*}z^{\alpha}_{i_{T(\nu,m-1)}\ \nu} \,, \quad \nu = 1,\dots,n \,. \tag{5.5.30} $$

ür $v \in \mathcal{A}(I_{m-1})$ können wir schreiben

$$\sum_{\substack{\mu=v+1 \\ \mu \in \mathcal{A}(I_{m-1})}}^{n} (t_{i_m \mu} + f_{i_m \mu-1})^{+)} = \sum_{\mu=v+1}^{n} (t_{i_m \mu} + f_{i_m \mu-1}) \,. \tag{5.5.31}$$

er Auftrag A_{i_m} ist auf allen Maschinen M_v , $v \in \mathcal{A}(I_{m-1})$, zu earbeiten. Man überzeugt sich leicht davon (vgl. Abschnitt 3.2), ß für die im Abschnitt 5.1 definierte Gesamtfertigungszeit

$g_\alpha(p_{m-1} / {}^*z^\alpha_{i_{\mathcal{I}(v,m-1)}} v , v \in \mathcal{A}(I_{m-1}))$, $p_{m-1} = (i_m)$ und

$= 1, 2$, gilt

$$\begin{aligned} {}^*g_\alpha(p_{m-1} / {}^*z^\alpha_{i_{\mathcal{I}(v,m-1)}} v , v \in \mathcal{A}(I_{m-1})) \\ = \max_{v \in \mathcal{A}(I_{m-1})} \Big\{ {}^*z^\alpha_{i_{\mathcal{I}(v,m-1)}} v + t_{i_m} v + r_{i_m} v + \sum_{\substack{\mu=v+1 \\ \mu \in \mathcal{A}(I_{m-1})}}^{n} (t_{i_m \mu} \\ + f_{i_m \mu-1}) \Big\} \,. \end{aligned} \tag{5.5.32}$$

nter Verwendung von (5.5.20) ergibt sich nach (5.1.3) bzw. 5.1.4) für ${}^*f_\alpha(p)$, $p \in S_{i_1,..,i_{m-1}}$:

$$\begin{aligned} {}^*f_\alpha(p) = \max \Big[{}^*V^\alpha_{i_1,..,i_{m-1}} , \\ {}^*g_\alpha(p_{m-1} / {}^*z^\alpha_{i_{\mathcal{I}(v,m-1)}} v , v \in \mathcal{A}(I_{m-1})) \Big] \,, \end{aligned} \tag{5.5.33}$$

$= 1, 2$.

us (5.5.29) bis (5.5.33) folgt, daß ${}^*K^\alpha_{i_1,..,i_{m-1}} = {}^*f_\alpha(p)$, $\in S_{i_1,..,i_{m-1}}$ und $\alpha = 1, 2$, ist. Mit (5.5.27) stellen wir est, daß (5.5.28) ebenfalls für $\alpha = 1, 2$ richtig ist.

) Wenn $\{v+1,..,n\} \cap \mathcal{A}(I_{m-1}) = \phi$ ist, sei die Summe als Null definiert.

ach (5.5.27) wissen wir, daß die Güte der Schranken aus
atz 5.5.1 (für gleiche Zahlen s_v) von den ${}^*B^\alpha$ - Schranken
ber die ${}^*C^\alpha$ - Schranken zu den ${}^*K^\alpha$ - Schranken abnimmt.
us den (unterschiedlichen) Konstruktionen der Schranken ist
rsichtlich, daß der Aufwand für die Berechnung der Schranken
n dieser Reihenfolge abnimmt.

ie Möglichkeit der Festlegung der Zahlen s_v , $v \in \mathcal{O}(I_\lambda)$,
ängt von der betrachteten Klasse $S_{i_1,..,i_\lambda}$ ab, da die Be-
ingung (5.5.19) zu erfüllen ist. Entsprechend der Definition
on $\mathcal{O}(I_\lambda)$ ist diese Bedingung für $s_v = 0$, $v \in \mathcal{O}(I_\lambda)$, stets
rfüllt.

ird bei der Festlegung der ${}^*B^\alpha$ - , ${}^*C^\alpha$ - und ${}^*K^\alpha$ - Schranken
$_v > 0$ gewählt, wobei die Bedingung (5.5.19) erfüllt sei, so
ind bei der Berechnung der Schranken Minima von (fiktiven)
wei- Maschinen- Problemen zu bestimmen, und zwar der Form
5.5.12) bzw. (5.5.13). Diese Minima lassen sich nach Abschnitt
.2 leicht ermitteln. Der Aufwand bei der Berechnung der Fertig-
tellungszeiten der ermittelten optimalen Lösungen für die fik-
iven Zwei- Maschinen- Probleme steigt entsprechend (5.5.7) mit
er Anzahl der Indizes, die im Durchschnitt von $\mathcal{M}_v(I_\lambda)$ und
$\mathcal{M}_{v+s_v}(I_\lambda)$ enthalten sind.

ie ${}^*B^\alpha$ - , ${}^*C^\alpha$ - und ${}^*K^\alpha$ - Schranken lassen sich besonders ein-
ach berechnen, wenn die Zahlen s_v , $v \in \mathcal{O}(I_\lambda)$, als $s_v = 0$
estgelegt sind. Um das einzusehen, genügt es, auf die Beziehung
5.5.11) zu verweisen.

enn von allen Aufträgen keine Maschinen "übersprungen" werden,
o stimmen die ${}^*B^\alpha$ - und ${}^*C^\alpha$ - Schranken mit den ${}^*\overline{B}^\alpha$ - und ${}^*\overline{C}^\alpha$ -
chranken überein. Dann gilt nämlich für v=1,..,n :

$$\mathcal{M}_v(I_\lambda) = I_\lambda \ , \quad \mathcal{O}(I_\lambda) = \{1,....,n\} \ , \quad \mathcal{L}(I_\lambda) = \phi \ .$$

erden bei der Festlegung von ${}^*B^\alpha$ - , ${}^*C^\alpha$ - und ${}^*K^\alpha$ - Schranken
hlen s_v größer als Null gewählt (falls das möglich ist), d.h.
s werden Minima von (fiktiven) Zwei- Maschinen- Problemen her-
ezogen, so erhöht sich gewöhnlich die Qualität der Schranken,
s ist aber möglich, daß man schlechtere Schranken erhält. Im

eispiel 7.3 wird für eine spezielle $^*B^{\alpha}$ - Schranke auf einen erartigen Fall hingewiesen. Wenn $i_m \notin \mathcal{M}_{v+s_v}(I_\lambda)$, $i_m \in I_\lambda$ estgewählt, ist, kann nämlich

$$^*W_{\lambda,v,s_v}(i_m) < {}^*W_{\lambda,v,0}(i_m) \quad , \; s_v > 0 \; ,$$

ein (vgl. auch obige Bemerkung zu den Abschätzungen (5.5.4) nd (5.5.5)). Wenn $i_m \in \mathcal{M}_{v+s_v}(I_\lambda)$ ist, gilt jedoch

$$^*W_{\lambda,v,s_v}(i_m) \geq {}^*W_{\lambda,v,0}(i_m)$$

ür $s_v > 0$ und $\mathcal{M}_v(I_\lambda) \cap \mathcal{M}_{v+s_v}(I_\lambda) \neq \phi$.

seien die Zahlen s_v , $v \in \mathcal{A}(I_\lambda)$, derart gewählt, so daß u jedem s_v ein Index $i^* \in \mathcal{M}_{v+s_v}(I_\lambda)$ existiert mit :

$$v+s_v = k_{\beta_{i^*}}(i^*)$$

d.h. für den Auftrag A_{i^*} ist M_{v+s_v} die letzte Maschine, auf er er zu bearbeiten ist) .

n diesem Fall erhalten wir für die Schranken $^*K^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda}$ ($\lambda = 1,.$.,m-2) den folgenden Ausdruck :

$$\max\Big[\, {}^*V^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda} \;, \quad \max_{v \in \mathcal{A}(I_\lambda)} \Big\{ {}^*x^{\alpha}_{\lambda v} + \min\big\{ h^*_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \;/\; p_\lambda \in S(I_\lambda) \big\} \Big\} \Big] \; . \tag{5.5.34}$$

ieht man von derartigen Spezialfällen ab, und vergleicht die $^{\alpha}$ - Schranken mit den entsprechenden $^*C^{\alpha}$ - Schranken im Hinlick auf den Aufwand für ihre Berechnung, so stellt man fest, aß keine erheblichen Unterschiede zu verzeichnen sind. Da die C^{α} - Schranken qualitativ besser sind, wird es (im allgemeien) vorteilhafter sein, anstelle von $^*K^{\alpha}$ - Schranken die entprechenden $^*C^{\alpha}$ - Schranken zu verwenden.

s sei $v^* = \max\{ v \;/\; v \in \mathcal{A}(I_\lambda) \}$. Werden die Zahlen s_v , $\in \mathcal{A}(I_\lambda)$, als $s_v = v^* - v$ gewählt, so erhalten wir für die $^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda}$ ($\lambda = 1,..,m-2$) die obige Darstellung (5.5.34) .

.6 Schrankenbildung für RFP 1 , RFP 2 und RFP 3

ach Abschnitt 3.3 kann für $f_1(p)$, $p \in S$, die Darstellung

$$f_1(p) = \max_{1 \le v \le n} \Big\{ \max_{L_{v,n,m}} \Big\{ t_v + \sum_{\mu=v}^{n} \sum_{\lambda=l_{\mu-1}}^{l_\mu} (t_{i_\lambda \mu} + r_{i_{v(i_\lambda,\mu)}\, i_\lambda \mu}) + \sum_{\mu=v}^{n-1} (f_{i_{l_\mu} \mu} - r_{i_{v(i_{l_\mu},\mu+1)}\, i_{l_\mu} \mu+1}) \Big\} \Big\} \tag{5.6.1}$$

ngegeben werden.

ir bezeichnen

$$h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) = \max_{\substack{\lambda+1 \le l \le m \\ i_l \in \mathfrak{M}_v(I_\lambda) \cap \mathfrak{M}_{v+s_v}(I_\lambda)}} \Big\{ \sum_{\varrho=\lambda+1}^{l} (t_{i_\varrho\, v} + r_{i_{v(i_\varrho,v)}\, i_\varrho\, v}) + \sum_{\mu=v+1}^{v+s_v} (t_{i_l \mu} + f_{i_l \mu-1}) + \sum_{\varrho=l+1}^{m} (t_{i_\varrho\, v+s_v} + r_{i_{v(i_\varrho,v+s_v)}\, i_\varrho\, v+s_v}) \Big\} , \tag{5.6.2}$$

$\lambda = 0,..,m-1$; $v = 1,..,n$, $s_v = 0,..,n-v$ und

$\mathfrak{M}_v(I_\lambda) \cap \mathfrak{M}_{v+s_v}(I_\lambda) \neq \phi$) , wobei $p_\lambda = (i_{\lambda+1},..,i_m) \in S(I_\lambda)$ ist.

s sei $p \in S$ beliebig gewählt. Unter Verwendung der Mengen
$_{v,n,m}(s_v)$ nach (5.5.2) und (5.5.3) kann die Gesamtfertigungs-
eit $f_1(p)$ abgeschätzt werden. Auf die Angabe der Abschätzungen
ird verzichtet. Analog zum Vorgehen im Abschnitt 5.5 erhal-
en wir :

ir $p \in S_{i_1,..,i_\lambda}$ ($\lambda = 1,..,m-1$) beliebig gewählt und

$= (i_{\lambda+1},..,i_m)$ gilt

$$f_\alpha(p) \geq x^\alpha_{\lambda v} + \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_{I(v+s_v)}\eta} + f_{i_{I(v+s_v)}\eta-1}) + h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \quad , \tag{5.6.3}$$

$\alpha = 1, 2, 3$; $v \in \mathcal{O}(I_\lambda)$, $s_v = 0,..,n-v$ und

$\mathcal{M}_v(I_\lambda) \cap \mathcal{M}_{v+s_v}(I_\lambda) \neq \phi$) , wobei $h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda)$ nach (5.6.2)

finiert ist.

us (5.6.3) erhalten wir :

Falls $i_m \in \mathcal{M}_{v+s_v}(I_\lambda)$ ist, gilt für alle $p \in S_{i_m;i_1,..,i_\lambda}$

$$f_\alpha(p) \geq x^\alpha_{\lambda v} + \min \{ h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S_{i_m}(I_\lambda) \} + \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_m\eta} + f_{i_m\eta-1}) \tag{5.6.4}$$

$$\geq x^\alpha_{\lambda v} + \min \{ h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S(I_\lambda) \} + \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_m\eta} + f_{i_m\eta-1}) \tag{5.6.5}$$

($\alpha = 1, 2, 3$; $v \in \mathcal{O}(I_\lambda)$, $s_v = 0,..,n-v$ und

$\mathcal{M}_v(I_\lambda) \cap \mathcal{M}_{v+s_v}(I_\lambda) \neq \phi$) .

Für alle $p \in S_{i_1,..,i_\lambda}$ gilt

$$f_\lambda(p) \geq x^\alpha_{\lambda v} + \min \{ h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S(I_\lambda) \} + \min_{i \in \mathcal{M}_{v+s_v}(I_\lambda)} \{ \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i\eta} + f_{i\eta-1}) \} \quad , \tag{5.6.6}$$

$(\alpha = 1, 2, 3 ;\ v \in \mathcal{U}(I_\lambda)\ ,\ s_v = 0,..,n-v$ und

$\mathcal{M}_v(I_\lambda) \cap \mathcal{M}_{v+s_v}(I_\lambda) \neq \phi\ )$.

enn $\mathcal{S}(I_\lambda) \neq \phi$ ist, ergibt sich nach Abschnitt 5.1 für alle ermutationen $p \in S_{i_1,..,i_\lambda}$

$$f_\alpha(p) \geq \max_{v \in \mathcal{S}(I_\lambda)} x^\alpha_{\lambda v} \quad , \tag{5.6.7}$$

$\alpha = 1, 2, 3$ und $\lambda = 1,..,m-1\ )$.

f den rechten Seiten der Ungleichungen (5.6.4) bis (5.6.6) eten die Minima

$$\min \{ h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S_{i_m}(I_\lambda) \} \ , \ i_m \in I_\lambda \ , \tag{5.6.8}$$

nd

$$\min \{ h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S(I_\lambda) \} \tag{5.6.9}$$

af. Die Bestimmung dieser Minima ist, infolge der zu be-cksichtigenden reihenfolgeabhängigen Rüstzeiten, mit einem rheblichen Aufwand verbunden. Auf die Diskussion (analog wie Abschnitt 5.4) von speziellen Lösungsmöglichkeiten wird er verzichtet.
e Minima (5.6.8) und (5.6.9) werden in den Abschätzungen .6.4) bis (5.6.6) durch untere Abschätzungen, die sich leicht rmitteln lassen, ersetzt.

r bezeichnen $(\lambda = 1,..,m-1)$

$$\widetilde{\mathcal{M}}_\mu(I_\lambda) = \{ \mathcal{M}_\mu(I_\lambda) \cup \{ i_{T(\mu,\lambda)} \} \} \quad ; \tag{5.6.10}$$

$$r_{i\,v} = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } i \notin \mathcal{M}_v(I_\lambda) \text{ ist} \\ \min\limits_{\substack{j \in \widetilde{\mathcal{M}}_v(I_\lambda) \\ j \neq i}} r_{j\,i\,v} & , \text{ falls } i \in \mathcal{M}_v(I_\lambda) \text{ ist} \end{cases} \tag{5.6.11}$$

$v = 1,..,n$ und $i \in I_\lambda$.

s sei $p \in S_{i_1,..,i_\lambda}$ beliebig gewählt. Entsprechend der Defi-
ition der reihenfolgeabhängigen Rüstzeiten im Kapitel 2
aben wir ($\mu = 1,..,n$, $\varrho = 1,..,m$) :

. Falls $i_\varrho \notin \mathfrak{M}_\mu$ ist, gilt $r_{i_{v(i_\varrho,\mu)}\, i_\varrho\, \mu} = 0$,

wobei $v(i_\varrho,\mu) = \varrho - 1$ vereinbart wurde.

. Falls $i_\varrho \in \mathfrak{M}_\mu(I_\lambda)$ ist, so ist $i_{v(i_\varrho,\mu)} \in \widetilde{\mathfrak{M}}_\mu(I_\lambda) \setminus \{i_\varrho\}$.

emnach ergibt sich für alle $p_\lambda \in S(I_\lambda)$

$$r_{i_\varrho\, \mu} \leq r_{i_{v(i_\varrho,\mu)}\, i_\varrho\, \mu} \quad , \quad \varrho = \lambda+1,..,m \, , \tag{5.6.12}$$

obei die Rüstzeiten $r_{i\,\mu}$, $i \in I_\lambda$, durch (5.6.11) definiert
ind.

s sei ${}^*h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda)$ durch (5.5.7) definiert, wobei die Rüst-
eiten $r_{i_\varrho\, j}$, $j = v,\ v+s_v$ und $i_\varrho \in I_\lambda$, nach (5.6.11) fest-
elegt sind. Aus (5.6.2), (5.6.12) und (5.6.4) bis (5.6.6)
olgt :

Falls $i_m \in \mathfrak{M}_{v+s_v}(I_\lambda)$ ist, gilt für alle $p \in S_{i_m;i_1,..,i_\lambda}$

$$f_\alpha(p) \geq x^\alpha_{\lambda v} + \min\{ {}^*h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S_{i_m}(I_\lambda) \} + \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_m\,\eta} + f_{i_m\,\eta-1}) \tag{5.6.13}$$

$$\geq x^\alpha_{\lambda v} + \min\{ {}^*h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S(I_\lambda) \} + \sum_{\eta=v+s_v+1}^{n} (t_{i_m\,\eta} + f_{i_m\,\eta-1}) \tag{5.6.14}$$

($\lambda = 1,..,m-1$; $\alpha = 1,\ 2,\ 3$; $v \in \mathfrak{A}(I_\lambda)$, $s_v = 0,..,n-v$
und $\mathfrak{M}_v(I_\lambda) \cap \mathfrak{M}_{v+s_v}(I_\lambda) \neq \phi$) .

Für alle $p \in S_{i_1,..,i_\lambda}$ gilt

$$f_\alpha(p) \geq x^\alpha_{\lambda\nu} + \min\{ {}^*h_{\nu,s_\nu,\lambda}(p_\lambda) \;/\; p_\lambda \in S(I_\lambda)\}$$

$$+ \min_{i \in \mathfrak{M}_{\nu+s_\nu}(I_\lambda)} \Big\{ \sum_{\eta=\nu+s_\nu+1}^{n} (t_{i\,\eta} + f_{i\,\eta-1}) \Big\}^{+)}, \qquad (5.6.15)$$

$(\lambda = 1,..,m-1\;;\; \alpha = 1,\ 2,\ 3\;;\; \nu \in \mathcal{O}(I_\lambda)\;,\; s_\nu = 0,..,n-\nu$
und $\mathfrak{M}_\nu(I_\lambda) \cap \mathfrak{M}_{\nu+s_\nu}(I_\lambda) \neq \phi$) .

ie Abschätzungen (5.6.7) und (5.6.13) bis (5.6.15) werden
ur Konstruktion der nachstehenden Schranken verwendet.

u jedem Index $\nu \in \mathcal{O}(I_\lambda)$ sei eine Zahl $s_\nu \in \{0,..,n-\nu\}$ mit

$$\mathfrak{M}_\nu(I_\lambda) \cap \mathfrak{M}_{\nu+s_\nu}(I_\lambda) \neq \phi$$

ewählt. Die Rüstzeiten $r_{i\mu}$, $i \in I_\lambda$ und $\mu = 1,..,n$, seien
urch (5.6.11) definiert.

ir bezeichnen

$$V^\alpha_{i_1,..,i_\lambda} = \begin{cases} \max\limits_{\nu \in \mathcal{L}(I_\lambda)} x^\alpha_{\lambda\nu} & \text{, falls } \mathcal{L}(I_\lambda) \neq \phi \text{ ist} \\ 0 & \text{, andernfalls} \end{cases} \qquad (5.6.16)$$

$$B^\alpha_{i_1,..,i_\lambda} = \max \Big[V^\alpha_{i_1,..,i_\lambda}\;,\; \min_{i_m \in I_\lambda} \Big\{ \max_{\nu \in \mathcal{O}(I_\lambda)} \{ x^\alpha_{\lambda\nu} + {}^*W_{\lambda,\nu,s_\nu}(i_m) \} \Big\} \Big] \qquad (5.6.17)$$

) vgl. S. 87

$$C^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda} = \min \Big[V^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda} ,$$

$$\min_{i_m \in I_\lambda} \Big\{ \max_{v \in \mathfrak{A}(I_\lambda)} \Big\{ x^{\alpha}_{\lambda v} + {}^{*}R_{\lambda,v,s_v}(i_m) + \min \{ {}^{*}h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S(I_\lambda) \} \Big\} \Big\} \Big]$$

(5.6.18)

(für $\alpha = 1, 2$ und $\lambda = 1,..,m-1$ sowie für $\alpha = 3$ und $\lambda = 1,..,m-2$) ;

$$B^{3}_{i_1,..,i_{m-1}} = C^{3}_{i_1,..,i_{m-1}} = f_3(p) \quad , p \in S_{i_1,..,i_{m-1}} .$$

(5.6.19)

Dabei sind die Bezeichnungen ${}^{*}h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda)$, ${}^{*}R_{\lambda,v,s_v}(i_m)$ und ${}^{*}W_{\lambda,v,s_v}(i_m)$ in (5.6.17) und (5.6.18) durch (5.5.7) , (5.5.22) und (5.5.21) definiert, wobei die (konstanten) Rüstzeiten $r_{i\,\mu}$, wie oben festgelegt, zu betrachten sind.

Satz 5.6.1 : Es seien $B^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda}$ und $C^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda}$ ($\alpha = 1, 2, 3$; $\lambda = 1,..,m-1$) die durch (5.6.11) und (5.6.16) bis (5.6.19) definierten Größen, dann gilt für alle $p \in S_{i_1,..,i_\lambda}$:

$$f_\alpha(p) \geq B^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda} \geq C^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda} . \qquad (5.6.20)$$

Wenn $\lambda = m-1$ ist, so haben wir

$$f_\alpha(p) = B^{\alpha}_{i_1,..,i_{m-1}} = C^{\alpha}_{i_1,..,i_{m-1}} \quad , p \in S_{i_1,..,i_{m-1}} .$$

(5.6.21)

Den Beweis führt man analog zum Beweis von Satz 5.5.1 . Dabei ist zu bemerken, daß für ${}^{*}C^{\alpha}_{i_1,..,i_{m-1}}$, $\alpha = 1, 2$, die Darstellung (5.5.29) ebenfalls angegeben werden kann.

Die bei der Berechnung der C^{α} - und B^{α} - Schranken zu ermittelnden Minima der Form

$$\min \{ {}^{*}h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \,/\, p_\lambda \in S_{i_m}(I_\lambda) \} \quad , i_m \in I_\lambda , \qquad (5.6.22)$$

...

$$\min\{ {}^{*}h_{v,s_v,\lambda}(p_\lambda) \;/\; p_\lambda \in S(I_\lambda) \} \qquad , \qquad (5.6.23)$$

...ie untere Abschätzungen von (5.6.8) bzw. (5.6.9) liefern, kön-...en, wie im Abschnitt 5.5 beschrieben wird, leicht bestimmt ...rden.

...rüglich der Abhängigkeit des Berechnungsaufwandes und der ...ualität der B^{α} - und C^{α} - Schranken von der Wahl der Zahlen ... , $v \in \mathcal{A}(I_\lambda)$, können die im Abschnitt 5.5 (über die ent-...rechenden ${}^{*}B^{\alpha}$- und ${}^{*}C^{\alpha}$ - Schranken) getroffenen Aussagen über-...ragen werden.
...r besseren Qualität der B^{α} - Schranken steht der erhöhte ...echenaufwand gegenüber.

...7 Bemerkungen zu den Ergebnissen

...urch die Angabe der unteren Schranken in den Abschnitten 5.3 ...is 5.6 können "Branch and Bound"- Verfahren, die im Kapitel 4 ...eschrieben werden, zur Lösung der im Kapitel 2 formulierten ...eihenfolgeprobleme verwendet werden.

... den Abschnitten 5.3 bis 5.6 werden jeweils zwei grundlegende ...assen von Schranken, B - Schranken und C - Schranken, be-...rachtet.

...ei den nachfolgender Betrachtungen wird teilweise auf die An-...abe der Zahlen bzw. Symbole

$$1,\ 2,\ 3,\ *,\ -\ ,$$

...erzichtet, und zwar im Sinne der im Kapitel 2 getroffenen Ver-...inbarung.

...erden bei der Festlegung von $B_{i_1,..,i_\lambda}$ und $C_{i_1,..,i_\lambda}$ alle Zahlen ... ($v \in \mathcal{A}(I_\lambda)$) gleich Null gewählt, so stimmen die beiden ...chranken überein und lassen sich besonders einfach bestimmen. ...ür ${}^{*}\overline{h}_{v,0,\lambda}(p_\lambda)$ nach (5.3.7) und ${}^{*}h_{v,0,\lambda}(p_\lambda)$ nach (5.5.7) haben ...ir :

Für alle $p_\lambda \in S(I_\lambda)$ gilt

$${}^{*}\overline{h}_{v,0,\lambda}(p_\lambda) = {}^{*}h_{v,0,\lambda}(p_\lambda) = \sum_{l \in I_\lambda} (t_{l\,v} + r_{l\,v}) \quad .$$

Es sei bemerkt, daß die Funktionen $^*\overline{h}_{v,0,\lambda}(p_\lambda)$ und $^*\overline{f}_{v,0,\lambda}(p_\lambda)$, $p_\lambda \in S(I_\lambda)$, als Zielfunktionen von "Ein- Maschinen-Problemen" des Typs $\overline{RFT}^*|1$ bzw. $RFP^*|1$ interpretiert werden können. Bei derartigen "Problemen" ist die Gesamtfertigungszeit aller Aufträge für alle Auftragsfolgen gleich.

Neben den oben betrachteten Schranken werden in den Abschnitten 5.3 bis 5.6 weitere B - und C - Schranken angegeben, und zwar mit dem Ziel, der Forderung F 1 aus Kapitel 4 (die "Klassen-Minima" möglichst gut zu approximieren) besser gerecht zu werden. Dabei wird versucht, die Forderung F 2 ebenfalls zu berücksichtigen.
Die entwickelten Schranken $B_{i_1,..,i_\lambda}$ und $C_{i_1,..,i_\lambda}$ werden von vornherein so konstruiert, daß (bei gleichen Zahlen s_v für beide Schranken) der höheren Qualität der Schranke $B_{i_1,..,i_\lambda}$ der geringere Berechnungsaufwand für die Schranke $C_{i_1,..,i_\lambda}$ gegenübersteht.
Bei der Berechnung der B - und C - Schranken sind Minima von (fiktiven) "Zwei- Maschinen- Problemen" zu bestimmen. Die Lösung dieser "Zwei- Maschinen- Probleme" (bzw. die Ermittlung der dazugehörenden Minima) ist leicht durchführbar. Man kann nach Abschnitt 5.2 auf einfache Weise Probleme von (praktisch) beliebiger Anzahl von Aufträgen lösen.

Den entwickelten unteren Schranken liegt eine einheitliche Konstruktionsmethodik zugrunde. Die Schrankenbildung für die RFT'e mit konstanten Rüstzeiten wird auf die entsprechenden Probleme mit reihenfolgeabhängigen Rüstzeiten übertragen. Kann von allen Aufträgen keine Maschinen "übersprungen" werden, so erhalten wir für die $^*B^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda}$ - und $^*C^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda}$ - Schranken die Schranken $^*\overline{B}^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda}$ und $^*\overline{C}^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda}$ sowie für die Schranken $B^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda}$ und $C^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda}$ die Schranken $\overline{B}^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda}$ und $\overline{C}^{\alpha}_{i_1,..,i_\lambda}$.
Es gilt nämlich für $v=1,..,n$:

$$\mathcal{M}_v(I_\lambda) = I_\lambda \quad , \quad \mathcal{O}(I_\lambda) = \{1,...,n\} \ ,$$

$$\mathcal{Z}_v(I_\lambda) = \phi \quad \text{und} \quad \widetilde{\mathcal{M}}_v(I_\lambda) = I_\lambda - 1 \quad .$$

Die Möglichkeit der Wahl der Zahlen $s_v \in \{0,..,n-v\}$ (der anwendbaren unteren Schranken), $v \in \mathcal{A}(I_\lambda)$, hängt bei den RFP'en, bei denen das "Überspringen von Maschinen" zugelassen wird, von dem jeweiligen Problem und der betrachteten Klasse $S_{i_1,..,i_\lambda}$ ab, da die Bedingungen

$$\mathcal{M}_v(I_\lambda) \cap \mathcal{M}_{v+s_v}(I_\lambda) \neq \phi \qquad (5.7.1)$$

zu erfüllen sind.

Die Zahlen s_v, $v \in \mathcal{A}(I_\lambda)$, können aber stets gleich Null gesetzt werden. Die Bedingung (5.7.1) besagt, daß mindestens einer der Aufträge A_i , $i \in I_\lambda$, sowohl auf der Maschine M_v als auch auf der Maschine M_{v+s_v} zu bearbeiten ist.

Weiterhin hängt von dem jeweiligen Problem (und der betrachteten Klasse) der Aufwand bei der Berechnung der verwendeten Schranke ab.

Der Berechnungsaufwand steigt mit der Anzahl der Indizes der Menge $\mathcal{A}(I_\lambda)$.

Der Aufwand bei der Bestimmung der Minima von "Zwei- Maschinen- Problemen" steigt mit der Anzahl der Indizes, die in den Durchschnitten $\mathcal{M}_v(I_\lambda) \cap \mathcal{M}_{v+s_v}(I_\lambda)$ enthalten sind.

Bei den B - Schranken hängt außerdem die Anzahl, der zu bestimmenden Minima, von der Anzahl der Indizes $i_m \in \mathcal{M}_{v+s_v}(I_\lambda)$ ab.

Mit der Wahl von Zahlen s_v größer als Null bei der Festlegung von $*\overline{B}^\alpha$ - Schranken und $\overline{B}^\alpha$ - Schranken ist eine Erhöhung der Qualität dieser Schranken verbunden (im Sinne von Forderung [illegible].

Für alle anderen B - und C- Schranken kann im allgemeinen eine derartige Aussage nicht getroffen werden. Dafür, daß bei diesen B - und C - Schranken ($*\overline{C}^\alpha$ - Schranken, $*B^\alpha$ - Schranken usw.) gewöhnlich) ebenfalls eine Erhöhung der Qualität bewirkt wird, spricht, daß die Anzahl, der bei der Bildung der Schranken herangezogenen Maximierungsglieder, größer ist. Es ist aber mög-

ich, daß man schlechtere Schranken erhält.

ie im Abschnitt 5.5 betrachteten $*K^{\alpha}$ - Schranken und $*C^{\alpha}$ - chranken unterscheiden sich hinsichtlich des Berechnungsaufndes nicht bedeutend. Da die Qualität der $*C^{\alpha}$- Schranken höher st, sind die $*C^{\alpha}$- Schranken den $*K^{\alpha}$- Schranken vorzuziehen.

n Abschnitt 5.3 ist es gelungen, die Abschätzung der Fertigtellungszeiten $*\overline{z}^{3}_{i_\lambda v}$, v=1,..,n, für eine beliebige Permutation $\in S_{i_1,\ldots,i_\lambda}$ (bzw. $p \in S_{i_1,\ldots,i_\lambda}$) gegenüber den Größen $*\overline{x}^{3}_{\lambda v}$ verbessern. Dadurch konnten Schranken ($*\overline{\mathbb{B}}^3$ - und $*\overline{\mathbb{F}}^3$ - gegeben werden, die gegenüber speziellen $*\overline{B}^3$ - hranken (vgl. S. 74) wirksamer sind, da sie qualitativ besser ind und keinen größeren Berechnungsaufwand erfordern.

s sei bemerkt, daß man unter Verwendung der konstruierten chranken die"Klassenminima" besser approximieren kann, wenn man ie folgt vorgeht :
Es werden die unteren Schranken für alle Klassen $S_{i_1,\ldots,i_\lambda,i_{\lambda+1}}$ $K(S_{i_1,\ldots,i_\lambda})$ bestimmt, d.h. für alle Klassen $S_{i_1,\ldots,i_\lambda,i_{\lambda+1}}$, $_{+1} \in I_\lambda$. Das Minimum dieser Schranken ergibt eine untere Schrane für die Klasse $S_{i_1,\ldots,i_\lambda}$.
n derartiges Vorgehen wird in [1] realisiert.

e in den einzelnen Abschnitten hergeleiteten Abschätzungen (5.3.10), (5.3.11), (5.4.15) usw.) bilden die Grundlage der in iesem Kapitel konstruierten unteren Schranken.
schließend soll noch auf weitere Möglichkeiten der Verwendung ieser Abschätzungen aufmerksam gemacht werden (ohne sie hier her zu untersuchen) :

Bei der Konstruktion der B - und C - Schranken wird zu jedem dex $v \in \alpha(I_\lambda)$ (und festgewählten Index i_m) durch die Wahl der l s_v nur eine (der möglichen) Abschätzungen herangezogen. In rblick auf eine Erhöhung der Qualität der unteren Schranken ist möglich, mehrere Abschätzungen (für verschiedene Zahlen s_v) zu , insbesondere die einfach berechenbaren Abschätzungen r $s_v = 0$, $v \in \alpha(I_\lambda)$.
bei gilt es, durch ein rationelles Vorgehen bei der Berechnung

erartiger Schranken (vgl. z.B. [1] , S. 80 f.) und die Entwicklung von Kriterien, die es gestatten, die Berechnung von bestimmten Abschätzungen von vornherein auszuschließen (s.h. Hilfssatz 5.3.1), den Berechnungsaufwand möglichst gering zu halten.

b) Die Voraussetzung V 2 aus Kapitel 4 bestimmt den engen Zusammenhang zwischen der Klassenzerlegung K und der Schrankenfunktion U.
Wird von der in Kapitel 4 durch (4.7) beschriebenen Klassenzerlegung (2. Möglichkeit) ausgegangen, so können die Abschätzungen, die bei der Konstruktion der B - Schranken verwendet werden, unmittelbar zur Bildung von Schranken für Klassen der Form $S_{i_m;i_1,..,i_\lambda}$ $(\lambda = 1,..,m-2)$ benutzt werden.
Es ist klar, daß sich die Schrankenberechnung vereinfacht.

Rechentechnische Realisierung eines "Branch and Bound" - Verfahrens zur Lösung von $\overline{RF}^*\,3$

ur Lösung von Reihenfolgeproblemen des Typs $\overline{RF}^*\,3$ wird die n Abschnitt 5.3 konstruierte $^*\overline{F}^3$ - Schranke herangezogen.

s (5.3.47) und (5.3.55) entsteht

$$
\begin{aligned}
{}^*\overline{F}^3_{i_1,\ldots,i_\lambda} = \max \Bigg[& t_v + \sum_{l=1}^{m} (t_{i_l\,n} + r_{i_l\,n}) \quad , \\
& \min_{i_m \in I_\lambda} \Bigg\{ \max_{1 \le r \le n-1} \Bigg\{ t_v + \sum_{l=1}^{m} (t_{i_l\,v} + r_{i_l\,v}) \\
& + \sum_{k=v}^{r-1} \max \Bigg[\max_{1 \le l \le \lambda} f_{i_l\,k} + t_{i_l\,k+1} \\
& + \sum_{\varrho=l+1}^{\lambda} (t_{i_\varrho\,k+1} + r_{i_\varrho\,k+1} - t_{i_\varrho\,k} - r_{i_\varrho\,k}) \\
& + \sum_{\mu \in I_\lambda} (t_{\mu\,k+1} + r_{\mu\,k+1} - t_{\mu\,k} - r_{\mu\,k}) \quad , \\
& f_{i_m\,k} + t_{i_m\,k+1} \Bigg] \Bigg\} \Bigg\} \Bigg] \qquad , \qquad (6.1)
\end{aligned}
$$

$\lambda = 1,\ldots,m-1$.

er im Kapitel 4 beschriebene (allgemeine) Ablauf des "Branch nd Bound" - Verfahrens (mit der Klassenzerlegung nach (4.6)) ird modifiziert.

6.1 Modifikation des Ablaufs des "Branch and Bound" - Verfahrens

ur Verringerung der Anzahl der Klassen, die in den Klassen- erlegungen $K^r(S)$ zu berücksichtigen sind, da sie eine optimale ösung enthalten können, wird das nachfolgende Eliminations-

rinzip herangezogen.
ie Schreibweise aus Kapitel 4 für die Klassen und Schranken
ehalten wir aus Bequemlichkeit bei.

l i m i n a t i o n s p r i n z i p (vgl. [19]) :

Es seien O^o eine obere Schranke für den Optimalwert der Zielfunktion ${}^*\overline{F}_3(p)$, $p \in S$, und C^o eine einelementige Klasse mit $\overline{F}(C^o) = O^o$.

ffenbar brauchen wir (bei der Suche von nur einer optimalen sung) nur solche Klassen $C_\mu^r \in K^r(S)$, $C_\mu^r \neq C^o$, zu berücksichigen, für die

$$U(C_\mu^r) < O^o \tag{6.1.1}$$

ilt.

s wird nun beschrieben, wie dieses Eliminationsprinzip verendet wird.
u Beginn der Reihenfolgeoptimierung wird eine Anfangslösung (Näherungslösung) mit Hilfe eines sehr einfachen Näherungsverfahrens ermittelt.

ä h e r u n g s v e r f a h r e n :

Es werden zunächst für alle m Klassen S_{i_1} , $i_1=1,..,m$, die unteren Schranken ${}^*\overline{F}_{i_1}^3$ bestimmt. Unter den Klassen S_{i_1} wird eine Klasse $S_{i_1^*}$ mit kleinster unterer Schranke ausgewählt.
ie Klasse $S_{i_1^*}$ wird in die (m-1) Klassen $S_{i_1^*,i_2}$, $i_2 \in I_1$, zerlegt. Es werden die dazugehörigen Schranken berechnet. Unter den Klassen wird wieder eine Klasse $S_{i_1^*,i_2^*}$ mit kleinster unterer Schranke ausgewählt.
ieser Prozeß wird fortgesetzt. Nach (r-1) Schritten erhalten ir eine einelementige Klasse $S_{i_1^*,i_2^*,..,i_{m-1}^*}$, deren Element $\in S_{i_1^*,..,i_{m-1}^*}$ als Anfangslösung benutzt wird.

ir setzen $O^o = {}^*\overline{F}_3(p^*)$ und $C^o = S_{i_1^*,..,i_{m-1}^*}$.

rd im Verlauf des Verfahrens (s.h. Abb. 4.1) eine einelemen-

ge Klasse $C_{\mu\cdot}^{r+1} \in K(C_{v_r\cdot}^{r})$ erhalten mit $U(C_{\mu\cdot}^{r+1}) < 0^{\circ}$, so be-
tzen wir im weiteren Verlauf:

$$0^{\circ} = U(C_{\mu\cdot}^{r+1}) \quad \text{und} \quad C^{\circ} = C_{\mu\cdot}^{r+1} \quad .$$

emnach können wir bei der Festlegung von $K^{r+1}(S)$ folgender-
aßen verfahren:
Falls für alle (mehrelementigen) Mengen $C_{\mu}^{r+1} \in K(C_{v_r\cdot}^{r})$ gilt

$$U(C_{\mu}^{r+1}) \geq 0^{\circ} \quad ,$$

bilden wir

$$K^{r+1}(S) = \{ C_{\varrho}^{r+1} \,/\, C_{\varrho}^{r+1} \in K^{r}(S) \,,\, C_{\varrho}^{r+1} \neq C_{v_r\cdot}^{r} \} \cup \{C^{\circ}\} \,. \tag{6.1.2}$$

Andernfalls setzen wir

$$K^{r+1}(S) = \{ C_{\varrho}^{r+1} \,/\, C_{\varrho}^{r+1} \in K^{r}(S) \,,\, C_{\varrho}^{r+1} \neq C_{v_r\cdot}^{r} \} \cup \{C^{\circ}\}$$
$$\cup \{ C_{\varrho}^{r+1} \,/\, C_{\varrho}^{r+1} \in K(C_{v_r\cdot}^{r}) \,,\, U(C_{\varrho}^{r+1}) < 0^{\circ} \} \quad . \tag{6.1.3}$$

s ist zu bemerken, daß $K^{r+1}(S)$ nach (6.1.2) bzw. (6.1.3) keine
lassenzerlegung von S bildet. Insbesondere enthält $K^{r+1}(S)$ nur
ine einelementige Menge und zwar nur die Menge C° .
eiterhin sei darauf hingewiesen, daß die oben beschriebene
odifikation keinen Einfluß auf die Anzahl der Schranken, die
ur Lösung des jeweiligen Problems (ohne eine derartige Modi-
ikation des Ablaufs) zu berechnen sind, hat, da die "eliminier-
en Klassen" C_{μ}^{r+1} , $U(C_{\mu}^{r+1}) \geq 0^{\circ}$, durch die im Kapitel 4 fest-
elegte Auswahlfunktion nicht ausgezeichnet werden.

ür die Testung des (modifizierten) Verfahrens wurde für die
echenanlage REST 6 ein FORTRAN- codiertes Programm erstellt.
abei wurde die Anzahl der Aufträge auf 20 und die Anzahl der
aschinen auf 10 beschränkt.
n der Anlage 1 sind das entwickelte FORTRAN- Programm und des-
en Beschreibung beigefügt.

.2 Numerische Erfahrungen

ie bisher durchgeführten Beispielrechnungen ergaben die in
er Tabelle 6.2 angegebenen Ergebnisse. In allen Beispielen
esitzen die Kapazitätsbelastungen der Maschinen den Wert Null.
ei der Festlegung der Transport- Rüst- und Bearbeitungszeiten
urden (gleichverteilte) Zufallszahlen verwendet.

n der ersten Spalte von Tabelle 6.2 ist die Beispielnummer ver-
rkt. Die zweite Spalte enthält die Größe der Probleme, d.h.
ie Anzahl m der Aufträge und die Anzahl n der Maschinen. Es
lgen in Spalte 3 der Zielfunktionswert der Anfangslösung
durch AL gekennzeichnet) und die Werte, die C^0 im Laufe der
echnung annimmt. Falls C^0 als optimaler Zielfunktionswert er-
annt wird, d.h. die zu C^0 gehörende einelementige Klasse C^0
ird durch die Auswahlfunktion ausgezeichnet, kennzeichnen wir
iesen Wert mit OL (optimaler Zielfunktionswert). Wird C^0 erst
ach weiterer Rechnung als optimaler Zielfunktionswert erkannt,
o wird dieser Wert nochmals aufgeführt und mit OL* gekenn-
eichnet. Das Symbol OL* wird ebenfalls benutzt, wenn die An-
angslösung bereits optimal war.
alls die zu C^0 gehörende einelementige Klasse C^0 nicht durch
ie Auswahlfunktion ausgewählt wird, ist in Spalte 4 die
chranke der ausgezeichneten Klasse angegeben.
n der Spalte 5 ist die Anzahl der Schranken, die bis zur Be-
timmung von OL bzw. OL* und (des jeweiligen Wertes) von C^0
erechnet wurden, vermerkt.
chließlich sind in der Spalte 6 die Rechenzeiten (einschließ-
ich Übersetzungszeiten des FORTRAN- codierten Programms) an-
egeben.

ei neun Problemen lag die Rechenzeit unter 30 Sekunden, bei
eiteren drei Problemen unter 1 Minute. Beim Beispiel 9 lag die
echenzeit unter 2 Minuten.
ei den Beispielen 12 und 13 mußte die Rechnung abgebrochen
erden, da entsprechend der gewählten Organisation der Speiche-
ung der Klassen und der dazugehörenden Schranken keine weiteren

Nr.	Größe m	Größe n	Ziel-funktions-wert	kleinste untere Schranke	Anzahl der Schranken	Rechen-zeit (sec)
1	6	4	331 AL	-	-	
			327 OL	-	25	15
2	6	4	301 AL	-	-	
			296 OL	-	35	15
3	7	7	297 AL	-	-	
			288	214	80	
			286	284	3220	
			284 OL	-	3225	48
4	8	6	267 AL	-	-	
			254	246	52	
			249	246	56	
			246 OL	-	57	14
5	9	6	1035 AL	-	-	
			976	926	137	
			966	926	138	
			961 OL	-	718	20
6	10	4	154 AL	-	-	
			149	143	99	
			147	143	99	
			146	144	171	
			145 OL	-	365	14
7	10	10	1250 AL	-	-	
			1210	1190	1726	
			1200	1190	1729	
			1200 OL*	-	3511	54

Tabelle 6.2

Nr.	Größe m	Größe n	Zielfunktionswert	kleinste untere Schranke	Anzahl der Schranken	Rechenzeit (sec)
8	10	10	1230 AL	-	-	
			1160	1110	902	
			1130	1120	1435	
			1130 OL*	-	2241	36
9	12	6	1540 AL	-	-	
			1527	1383	609	
			1436	1383	610	
			1410	1383	633	
			1389	1387	3950	
			1389 OL*	-	4999	108
10	13	4	248 AL	-	-	
			238 OL	-	135	15
11	14	4	259 AL	-	-	
			259 OL*	-	130	15
12	15	5	566 AL	-	-	
			564	563	135	
			-	563	9063	159
13	16	5	588 AL	-	-	
			579	546	228	
			561	546	229	
			549	546	257	
			-	546	7850	109
14	17	4	307 AL	-	-	
			307 OL*	-	184	15
15	20	5	1511 AL	-	-	
			1502	1484	243	
			1489	1484	244	
			1485	1484	268	
			1484 OL	-	270	22

Tabelle 6.2 (Fortsetzung)

ssen und Schranken gespeichert werden konnten (s. Anlage 1).
eressant ist in diesen beiden Fällen, daß nach der Berechnung
er geringen Anzahl von Schranken bereits gute Näherungs-
ungen , wie ein Vergleich mit den kleinsten unteren Schranken
er noch nicht zerlegten (mehrelementigen) Klassen zeigt (vgl.
lte 4), bekannt waren.
einigen Fällen führte das im vorhergehenden Abschnitt be-
riebene Näherungsverfahren auf eine gute Anfangslösung, bei
Beispielen 11 und 14 sogar zu einer optimalen Lösung. Die
tere Rechnung bei diesen Beispielen diente nur dazu, die
ngslösung als eine optimale Lösung zu erkennen.
die Beispiele 7 und 8 zeigen, kann die Anzahl von Schanken,
notwendig sind, um eine bereits bestimmte Lösung als eine
imale zu erkennen, erheblich sein.
den Beispielen wird deutlich, daß man nicht unmittelbar aus
Anzahl m der Aufträge (die Anzahl aller möglichen Auftrags-
gen wird durch m bestimmt) auf die erforderliche Rechenzeit
ließen kann. Insbesondere ist eine Abhängigkeit der Wirksam-
t des Verfahrens (der verwendeten unteren Schranke) von der
ahl der Maschinen zu erkennen.

gesamt können die bisher durchgeführten Tests als recht
riedigend eingeschätzt werden. Eine weitere Testung ist er-
derlich, um vor allem festzustellen, wie groß m und n ge-
lt werden können, so daß unter Einbeziehung externer
icherungsmöglichkeiten bei der Speicherung der Klassen und
ranken noch befriedigende Ergebnisse erzielt werden.

Beispiele

diesem Kapitel werden an Hand von Beispielen die in den
iteln 4 und 5 entwickelten "Branch and Bound"- Verfahren
ustriert.
Ablauf des jeweiligen Verfahrens wird durch einen Branching-
m graphisch dargestellt (Abb. 7.1 bis Abb. 7.6). Dabei ent-
icht jedem Knoten im Branching- Baum, durch $i_1,..,i_\lambda$ ge-
nzeichnet, genau eine Klasse $S_{i_1,..,i_\lambda}$. Die Schranken wer-
als Marken an den Knoten angegeben.
Berechnung der Schranken erfolgt in den in der Anlage 2 bei-
igten Tabellen.

spiel 7.1 Es sind fünf Aufträge auf vier Maschinen zu be-
eiten. Dabei sind gegeben:

$\mathcal{A}_1 = \{2, 4\}$ $\mathcal{A}_2 = \{1, 3, 4\}$ $\mathcal{A}_3 = \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{A}_4 = \{1, 3, 4\}$ $\mathcal{A}_5 = \{2, 3, 4\}$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 8 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 2 & 7 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad t = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er Verwendung der $^*B^\alpha$ - Schranken aus Satz 5.5.1 , wobei die
ien s_v , $v \in \mathcal{A}(I_\lambda)$, als $s_v = 0$ festgelegt sind, werden die
bleme RFP* 1 und RFP* 2 gelöst. Die Abbildungen 7.1 und
zeigen die dazugehörenden Branching- Bäume.
die beiden Probleme liefert $p^*=(4,1,2,5)$ eine optimale
ung. Die dazugehörenden Gesamtfertigungszeiten sind
$(p^*) = 37$ und $^*f_2(p^*) = 39$.

spiel 7.2 Auf jeder der Maschinen M_1, M_2 und M_3 sind die
träge A_1, A_2,...,A_5 zu fertigen. Dabei sind gegeben :

$$= \begin{bmatrix} 17 & 24 & 20 \\ 13 & 24 & 17 \\ 15 & 18 & 16 \\ 12 & 17 & 20 \\ 21 & 14 & 15 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 8 & 9 \\ 5 & 3 \\ 3 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix} \qquad R_1 = \begin{bmatrix} - & 8 & 7 & 10 & 5 \\ 13 & - & 9 & 16 & 13 \\ 7 & 14 & - & 8 & 7 \\ 8 & 11 & 4 & - & 9 \\ 8 & 12 & 16 & 15 & - \end{bmatrix}$$

$$_2 = \begin{bmatrix} - & 6 & 4 & 16 & 6 \\ 11 & - & 14 & 7 & 16 \\ 10 & 12 & - & 6 & 10 \\ & 12 & 4 & - & 8 \\ 9 & 10 & 14 & 14 & - \end{bmatrix} \qquad R_3 = \begin{bmatrix} - & 10 & 11 & 7 & 14 \\ 7 & - & 12 & 13 & 9 \\ 14 & 9 & - & 12 & 8 \\ 2 & 14 & 6 & - & 8 \\ 9 & 10 & 13 & 13 & - \end{bmatrix}$$

$$_{0,1} = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \\ 12 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad R_{0,2} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 3 \\ 11 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad R_{0,3} = \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \\ 13 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad t = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 40 \end{bmatrix} .$$

er Verwendung der (speziellen) $\overline{C}^{\alpha}$ - Schranken aus Satz 5.4.1 den Zahlen $s_v = n-v$, $v=1,..,n$, werden die Probleme $\overline{RFP}$ 1 $\overline{RFP}$ 3 gelöst.

den Abbildungen 7.3 ($\overline{RFP}$ 1) und 7.5 ($\overline{RFP}$ 3) sind die äufe der Verfahren dargestellt. Aus den Abbildungen ist erhtlich, daß die Permutation p =(4,3,5,1) eine optimale Lösung $\overline{RFP}$ 1 und $\overline{RFP}$ 3 liefert. Die Gesamtfertigungszeiten betragen jeweils 181 .

Abbildung 7.4 zeigt den Branching- Baum, wenn zur Lösung $\overline{RFP}$ 1 die $\overline{B}^1$ - Schranken mit den Zahlen $s_v = 0$, $v=1,..,n$, angezogen werden. Diese Schranken sind leichter berechenbar die oben verwendeten $\overline{C}^1$ - Schranken, jedoch ist die Anzahl berechneten Schranken (34 gegenüber 14 im obigen Fall) betend größer.

sei bemerkt, daß die $\overline{B}^1$ - Schranken mit den $\overline{C}^1$ - Schranken reinstimmen, wenn $s_1=...=s_n = 0$ ist. Damit liefert das bechtete Reihenfolgeproblem ein Beispiel dafür, daß sich die litüt der C^{α} - Schranken erhöht,wenn bei ihrer Festlegung len s_v ($v=1,..,n-1$) gewählt werden, die verschieden von Null . Im Abschnitt 5.3 (für die entsprechenden $^*C^{\alpha}$ - Schranken) de darauf hingewiesen, daß im allgemeinen das nicht der Fall n muß.

spiel 7.3 (vgl. [5]) Es sind fünf Aufträge auf vier
schinen zu fertigen, wobei

$\mathcal{M}_1 = \{2, 4\}$ $\mathcal{M}_2 = \{1, 3, 4\}$ $\mathcal{M}_3 = \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{M}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ $\mathcal{M}_5 = \{1, 2, 3, 4\}$ sind.

Kapazitätsbelastungen der Maschinen, Rüstzeiten und
nsportzeiten sind alle gleich Null. Die Bearbeitungszeiten
d gegeben durch

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 10 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

er Verwendung der im Beispiel 7.1 betrachteten ${}^*B^2$ -
ranken wird das Problem RFP* 2 gelöst.
Abbildung 7.6 veranschaulicht den Ablauf des "Branch and
nd"- Verfahrens. Die Permutation p =(4,1,2,5,3) mit der Ge-
tfertigungszeit ${}^*f_2(p) = 28$ ist eine optimale Lösung für
* 2 .

[5] werden zur Lösung von RFP* 2 Schranken verwendet, die
enüber den hier benutzten ${}^*B^2$ - Schranken teilweise schlech-
sind, und zu deren Berechnung ein größerer Aufwand erfor-
lich ist. Die abweichenden Schrankenwerte sind in den runden
mmern (Abb. 7.6) vermerkt.

sei bemerkt, daß man für die Klasse S_1 die Schranke ${}^*B_1^2 = 24$
ält, wenn die Zahlen s_v durch

$s_1 = 3$ $s_2 = 2$ $s_3 = 1$ $s_4 = 0$

tgelegt sind. Aus der Abbildung 7.6 ist ersichtlich, daß
se Schranke gegenüber der oben erhaltenen Schranke, bei der
e Zahlen s_v gleich Null sind, schlechter ist (für diese Klas-
.

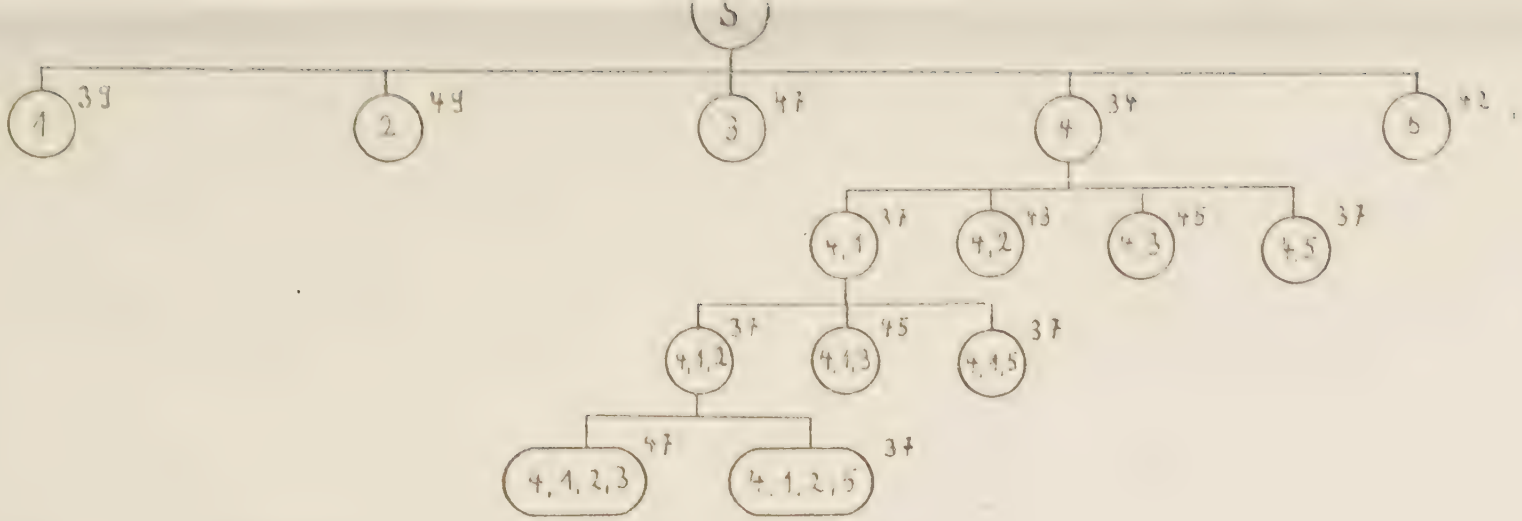


Abb. 7.1 Branching- Baum für RFP* 1

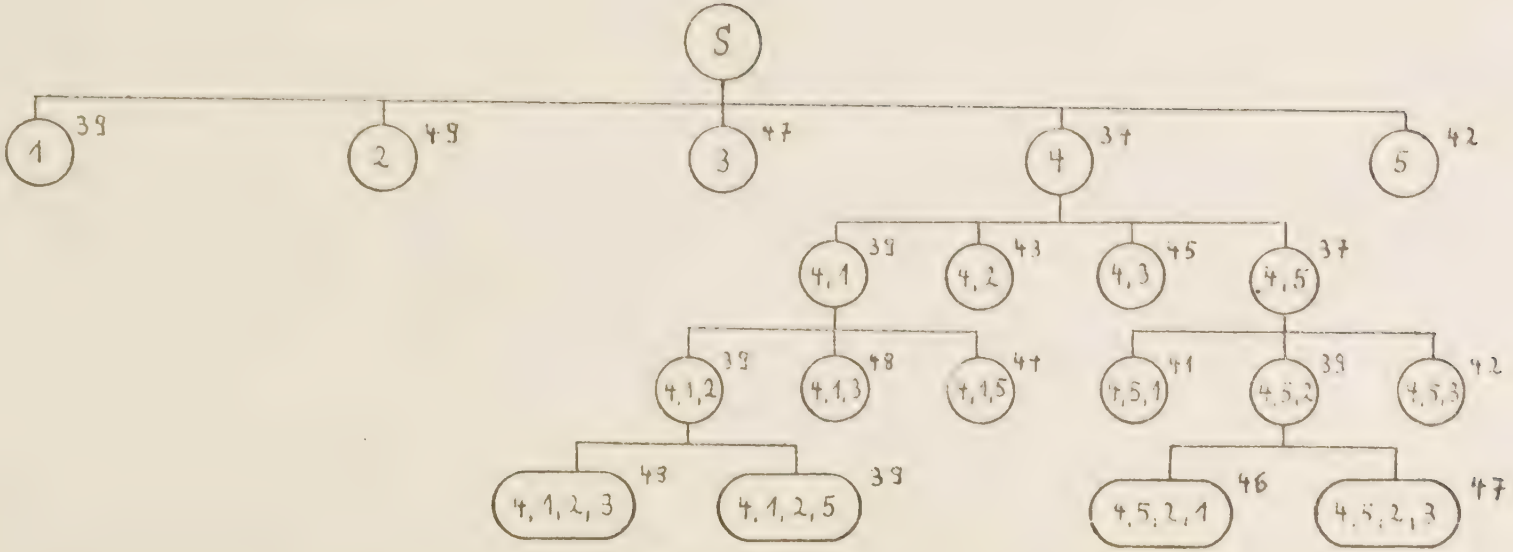


Abb. 7.2 Branching- Baum für RFP*2 (Beispiel 7.1)

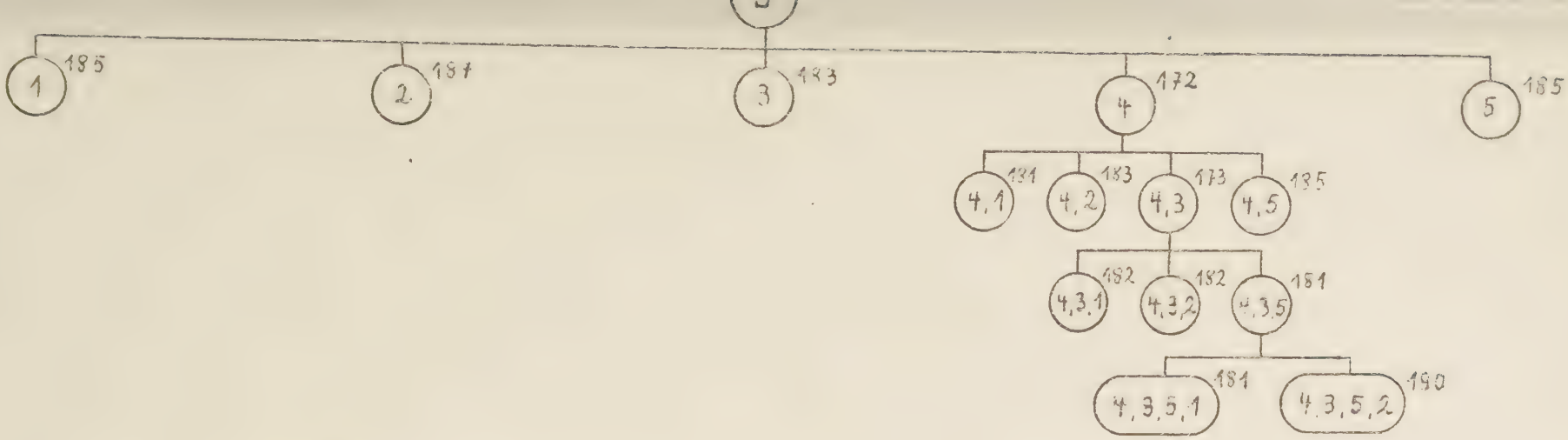


Abb. 7.3 Branching- Baum für $\overline{RFP}$ 1 ($\overline{C}^1$ - Schranke)

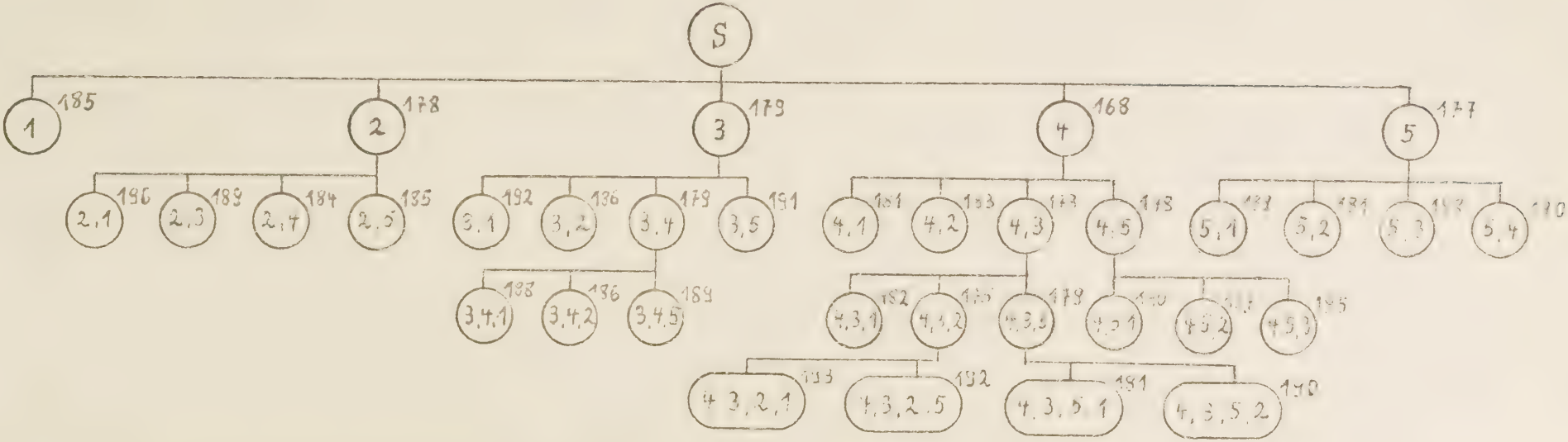


Abb. 7.4 Branching- Baum für $\overline{RFP}$ 1 ($\overline{B}^1$ - Schranke)

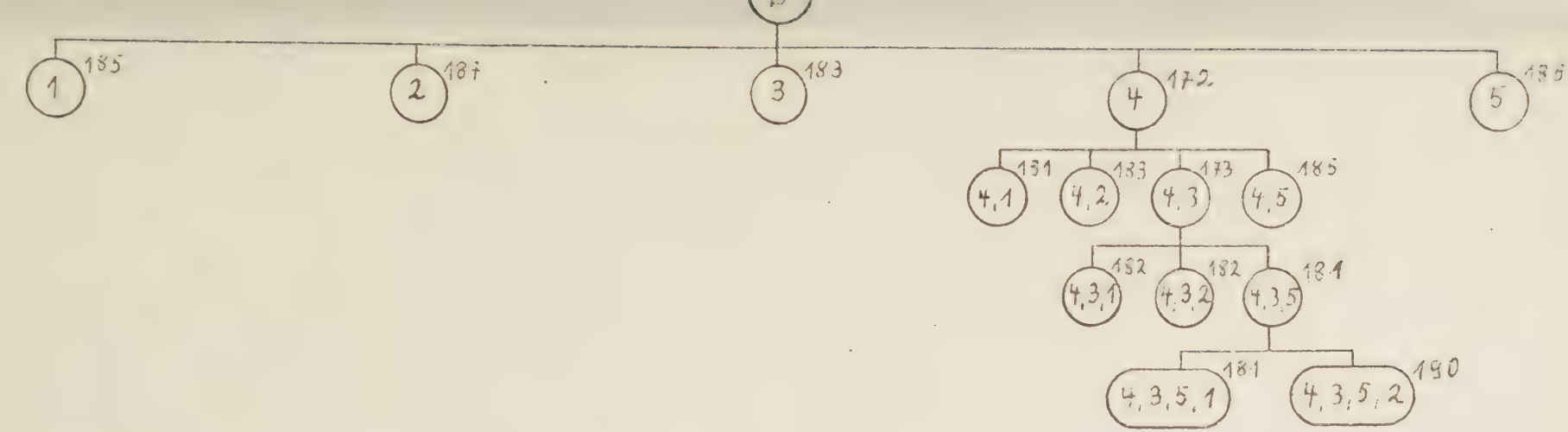


Abb. 7.5 Branching- Baum für $\overline{RFP}$ 3

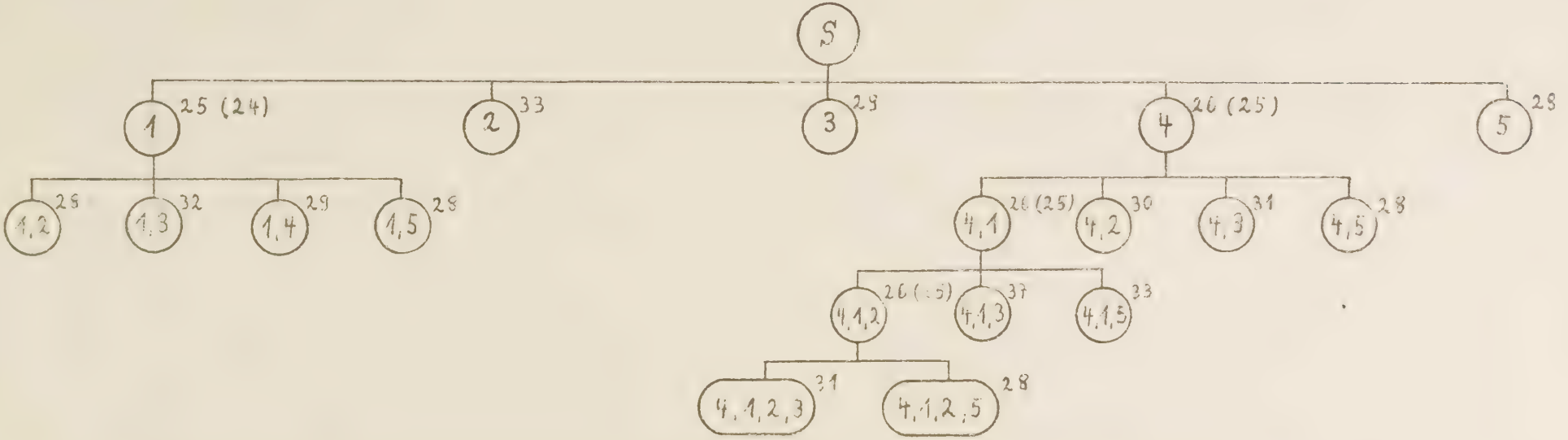


Abb. 7.6 Branching- Baum für RFP* 2 (Beispiel 7.3)

Zusammenfassung

der vorliegenden Arbeit werden Reihenfolgeprobleme mit glei-
n Auftrags- und Maschinenfolgen betrachtet, die im Kapitel 2
muliert sind.
 allen Problemstellungen ist das Optimierungsziel die Mini-
rung der Gesamtfertigungszeit aller Aufträge, d.h. die Ge-
tdauer des Bearbeitungsprozesses.
en den Bearbeitungszeiten der Aufträge auf den Maschinen
nen Transportzeiten der Aufträge sowie (konstante bzw. rei-
folgeabhängige) Rüstzeiten und Kapazitätsbelastungen der
chinen berücksichtigt werden. Weiterhin ist das "Übersprin-
 von Maschinen" durch die Aufträge zugelassen.
 Problemstellungen RFP 2 und RFP 3 unterscheiden sich von dem
henfolgeproblem RFP 1 dadurch, daß beim RFP 2 Wartezeiten der
träge und beim RFP 3 Stillstandszeiten der Maschinen verboten
d. Unter den zusätzlichen Annahmen "ohne Überspringen von
chinen" und "konstante Rüstzeiten" werden Spezialisierungen
 Problemstellungen RFP 1, RFP 2 und RFP 3 betrachtet.

Kapitel 3 werden Darstellungsmöglichkeiten der Gesamtferti-
gszeit aller Aufträge für die einzelnen Probleme hergeleitet.
ie im Abschnitt 3.2 angegebenen Beziehungen gestatten es, bei
gegebener Auftragsreihenfolge die Gesamtfertigungszeit aller
träge und die Fertigstellungszeiten der Aufträge auf den Ma-
inen (rekursiv) zu berechnen. Sie bilden die Grundlage für
 Ableitung analytischer Darstellungen der Zielfunktionen
ie für die Bestimmung der Größen $x_{\lambda\nu}$, die bei der Anwendung
 im Kapitel 5 konstruierten unteren Schranken zu ermitteln
d.
Abschnitt 3.3 werden analytische Darstellungen der Gesamt-
tigungszeit aller Aufträge als Funktion der Auftragsfolgen
geleitet, in denen nur die gegebenen Größen (Transportzeiten,
tzeiten, Bearbeitungszeiten, Kapazitätsbelastungen der Ma-
inen) auftreten. Die Untersuchungen im Kapitel 5 stützen
n auf diesen Darstellungen.
 Probleme $\overline{RFP}$ 2 und $\overline{RFP}^*$ 2 , bei denen die Bedingungen "ohne
rspringen von Maschinen" und "Verbot von Wartezeiten" zu be-
ksichtigen sind, werden im Abschnitt 3.4 auf Rundreisepro-
me zurückgeführt.

: Lösung der untersuchten Reihenfolgeprobleme werden Verfah-
vorgeschlagen, denen die Konzeption "Branch and Bound" zu-
nde liegt.
Kapitel 4 werden zuerst die Grundgedanken und das allgemeine
eitsprinzip dieser Konzeption dargelegt. Anschließend werden
Klassenzerlegung K und die Auswahlfunktion A konkretisiert.

Kapitel 5 werden verschiedene Möglichkeiten der Bildung un-
er Schranken, die zur Realisierung der Konzeption "Branch and
nd" benötigt werden, untersucht. Dabei wird angestrebt, den
lfunktionswert einer beliebigen Permutation der betrachteten
sse möglichst gut zu approximieren, und die Berechnung der
ranken relativ einfach zu gestalten.
werden für alle Probleme jeweils zwei Klassen von Schranken
egeben, wobei der höheren Qualität der Schranken der einen
sse der geringere Berechnungsaufwand der entsprechenden
ranken der anderen Klasse gegenübersteht.
lweise sind bei der Berechnung von Schranken Minima von (fik-
en) "Zwei- Maschinen- Problemen" zu bestimmen. Im Abschnitt
wird angegeben, wie die Lösung dieser "Zwei- Maschinen-
bleme" auf einfache Weise durchgeführt werden kann.
Schrankenbildung für die Probleme mit konstanten Rüstzeiten
d auf die entsprechenden Reihenfolgeprobleme mit reihen-
geabhängigen Rüstzeiten übertragen, wobei die reihenfolge-
ängigen Rüstzeiten einzeln abgeschätzt werden.
Schranken für die Probleme, bei denen das Überspringen von
chinen" zugelassen wird, stellen Schranken für die Probleme mit
Bedingung "ohne Überspringen von Maschinen" dar.
e Diskussion der konstruierten Schranken ist im Abschnitt 5.7
genommen.

Kapitel 6 befaßt sich mit der rechentechnischen Realisierung
es speziellen "Branch and Bound"- Verfahrens. Für die Testung
Verfahrens wurde für die Rechenanlage BESM 6 ein FORTRAN- co-
rtes Programm erstellt. Die bisher erhaltenen Testergebnisse
nen als befriedigend eingeschätzt werden.

Kapitel 7 werden durch Beispiele die entwickelten "Branch and
nd"- Verfahren illustriert.

9. Literaturverzeichnis

[1] Bank, B. : Über die Anwendung der Branch and Bound Methode auf Reihenfolgeprobleme . Dissertation, TH Magdeburg, 1969 .

[2] Bank, B. : Konstruktion unterer Schranken für Zielfunktionswerte bei Reihenfolgeproblemen mit gleichen Bearbeitungs- und Maschinenfolgen . Wiss. Z. Humboldt- Univ. Berlin Math. Nat. Reihe XIX (1970) 6 .

[3] Bank, B. : Branch and Bound Algorithmen für zwei Reihenfolgeprobleme . Math. Operationsforschung und Statistik, Bd. 1 , 3 (1970).

[4] Bank, B. / Seiffart, E. : Ein Branch and Bound Algorithmus eines Reihenfolgeproblemes . Ekonomicko- Mathematický Obzor, Bd. 5,1 (1969) .

[5] Bräsel, H.:Reihenfolgeprobleme mit und ohne Überspringen von Arbeitsplätzen . Dissertation, TH Magdeburg, 1975 .

[6] Bräsel, L.:Reihenfolgeprobleme mit reihenfolgeabhängigen Rüstzeiten . Dissertation, TH Magdeburg, 1975 .

[7] Charlton, J.M./ Death, C.C.: A Method of Solution for General Ma chine- Scheduling Problems . Oper. Res. 18 ,1970, Nr. 4 .

[8] Churchmann/ Ackoff/ Arnoff : Operations Research - Eine Einführung in die Unternehmensforschung . Verlag R. Oldenburg, Wien und München, 1964 .

[9] Conway, R.W./ Maxwell/ Miller : Theory of Scheduling. Addison - Wesley Publishing Company , Reading , Massachusatts , 1967 .

[10] Dickhut, E.O. : Zur Problematik der optimalen Fertigungsablaufplanung in der Einzel - und Kleinserienfertigung . Dissertation , TH Aachen , 1966 .

[11] Dressel, R./ Liehmann : Bestimmung der optimalen Reihenfolge auf Fließlinien mit wechselndem Produktionsprogramm . Fertigungstechnik und Betrieb 16, 1966 .

[12] Dudek, R.A./ Teuton : Development of M- Stage Decision Rule for Scheduling n Jobs trough M - Machines . Oper. Res. 12 , 3 (1964) .

[13] Guhr, H.-D. : Ablaufkomplexe - kombinatorische Untersuchungen zur Entwicklung von Optimierungsalgorithmen für einige Ablauf - und Be - schränkungskomblexe . Dissertation, TU Dresden , 1975 .

[14] Hauk, W. : Beitrag zur Lösung des Reihenfolgeproblems . Dissertation , TH Aachen , 1972 .

[15] Hempel, L. : Zur Lösung eines Reihenfolgeproblems . Dissertation , Hochschule Arch. u. Bauwesen Weimar , 1971 .

[16] Koss, K. : Fertigungsablaufplanung mittels operationsanalytischer Methoden . Physica Verlag, Würzburg - Wien, 1965 .

[17] Ignal, E./ Schrage, L. : Application of the Branch - and Bound Technique to some Flow - Shop Scheduling Problems . Oper. Res. 13 , 1965 .

[18] Jackson, J.R. : An Extension of Johnson`s Results on Job - Lot Scheduling .
Nav. Res. Log. Quart. 3 , 3 (1956) .

[19] Jaeschke, G. : Branching and Bounding - Eine allgemeine Methode zur Lösung kombinatorischer Probleme .
Ablauf - und Planungsforschung 5 , 3 (1964) .

[20] Jaeschke, G. : Das Reihenfolgeproblem für Erzeugnisse mit gleichem Ablauf . IBM Fachbibliothek 78104 , Sindelfingen 1963 .

[21] Johnson, S.M. : Optimal two - and three - stage production schedules with setup times included .
Nav. Res. Log. Quaterly 2 , 1 (1954) .

[22] Korbut, A.A./ Finkelstein : Diskrete Optimierung .
Akademie - Verlag, Berlin, 1971 .

[23] Kunze, W. : Näherungslösung eines Reihenfolgeproblems .
Dissertation, TH Karl- Marx- Stadt , 1967.

[24] Littger, K. : Bearbeitung komplexer Reihenfolgeprobleme mit elektronischen Datenverarbeitungsanlagen .
Elektron. Rechenanl. 6 , 4 (1964) .

[25] Little, K.G./ Murty/ Sweeny/ Karel : An Algorithm for the Traveling - Salesman Problem .
Oper. Res. 11 , 12 (1963) .

[26] Mandel, R. : Ein Beitrag zu den Reihenfolgeproblemen.
Ekonomicko - Mathematicky Obzor,
Bd. 11 , 1 (1975) .

[27] Mensch, G. : Ablaufplanung . Köln u. Opladen 1968 .

[28] Mitten, L.G. : Sequecing n Jobs on Two Machines with Arbitrary Time Lags .
Management Science 5 , 3 (1959) .

[29] Moore, F.G. : Production Control .
Mc Graw- Hill Book Co. , New York, 1951 .

[30] Müller- Merbach, H. : Optimale Reihenfolgen .
Springer Verlag Berlin - Heidelberg - New York , 1970 .

[31] Piehler , J. : Ein Beitrag zum Reihenfolgeproblem .
Unternehmensforschung - Operations - Research , Bd. 4 , 3 (1960) .

[32] Schoch , M. : Ein Erweiterungsprinzip als Konzeption zur Lösung kombinatorischer Probleme .
Math. Operationsforschung u. Statistik , Bd. 1 , 4 (1970) .

[33] Seiffart, E. : Lösungsmöglichkeiten verschiedener Reihenfolgeprobleme .
Dissertation , TH Magdeburg , 1964 .

[34] Seiffart, E. : Reihenfolgeprobleme mit gleichen Maschinen - und Bearbeitungsfolgen .
Habilitationsschrift , TH Magdeburg , (1969) .

[35] Wagner , H.M. : An Integer Linear Programming Model for Machine Scheduling .
Nav. Res. Logist. Quart. 6 , 2 (1959) .

Anlage 1

FORTRAN- Programm für die Berechnung einer optimalen Auftragsreihenfolge für das Reihenfolgeproblem $\overline{NF1}$* 3

Für die Programmtestung wurde die Anzahl der Maschinen auf 10 und die Anzahl der Aufträge auf 20 beschränkt. Bei einer Anwendung des vorliegenden Programms auf größere Probleme sind zu ändern:

a) Ein- und Ausgabe der Daten
b) Speicherung der Klassen und Schranken (in Hinblick auf die Einbeziehung externer Speicherungsmöglichkeiten)

1. Eingangsdaten und Eingabe der Daten

Es sind die folgenden Daten bereit zu stellen :

a) Anzahl der Aufträge m
b) Anzahl der Maschinen n
c) Matrix der Bearbeitungszeiten $T = (t_{i\,j})_{m,n}$
d) Matrix der Rüstzeiten $R = (r_{i\,j})_{m,n}$
e) Matrix der Transportzeiten $F = (f_{i\,j})_{m,n-1}$
f) Vektor der Kapazitätsbelastungen der Maschinen $t = (t_j)_{n,1}$

Für die Eingabe dieser Daten werden nachfolgende Vereinbarungen getroffen.
Anstelle der drei Matrizen T , R und F werden die Matrizen LT und LF eingegeben:

$$LT = (\bar{t}_{i\,j})_{m,n} \quad \text{mit} \quad \bar{t}_{i\,j} = t_{i\,j} + r_{i\,j} \ ,$$

$$LF = (\bar{f}_{i\,j})_{m,n-1} \quad \text{mit} \quad \bar{f}_{i\,j} = t_{i\,j+1} + f_{i\,j} \ .$$

Anstelle des Vektors t werden zwei Vektoren LK1 und LK2 eingegeben. Der Vektor LK1 enthält als erste Komponente t_1 und als letzte t_n . Weiterhin enthält (O.B.d.A.) LK1 nur die Kapazitätsbelastungen t_j mit $t_j \geq t_s$, s=1,..,j-1 . Die Anzahl der Komponenten NK1 von LK1 wird ebenfalls eingegeben. Der Vektor LK2

beinhaltet (der Größe nach geordnet) die Indizes t_j , die in LK1 enthalten sind. Damit haben wir

$$LK1(j) = t_{LK2(j)} \quad , \; j = 1,..,\, NK1 \quad .$$

Die Eingabe der Daten erfolgt mittels Lochkarten in der Reihenfolge :

1. m,n,NK1
2. LK2(1),..,LK2(NK1)
3. LT spaltenweise
4. LF spaltenweise
5. LK1 komponentenweise

Alle Daten werden (O.B.d.A.) als ganzzahlig vorausgesetzt, wobei für m, n, NK1, LK2(r) zwei Stellen, für die $\bar{t}_{ij}$ und $\bar{f}_{ij}$ fünf Stellen und die Kapazitätsbelastungen LK1(s) neun Stellen zugelassen sind.

<u>Beispiel</u> (vgl. Tabelle 6.2 , Nr. 6)

Es sind die folgenden Daten gegeben.

m = 10 n = 4 NK1 = 2

LK2(1) = 1 LK2(2) = 4

LK1(1) = 0 LK1(2) = 0

$$LT = \begin{bmatrix} 12 & 7 & 8 & 5 \\ 2 & 16 & 19 & 3 \\ 12 & 5 & 11 & 5 \\ 14 & 3 & 18 & 12 \\ 15 & 7 & 16 & 9 \\ 14 & 17 & 16 & 18 \\ 9 & 14 & 19 & 16 \\ 5 & 10 & 5 & 18 \\ 11 & 14 & 5 & 16 \\ 6 & 11 & 4 & 7 \end{bmatrix} \qquad LF = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 11 & 20 & 6 \\ 19 & 13 & 3 \\ 5 & 18 & 7 \\ 7 & 13 & 9 \\ 12 & 14 & 13 \\ 3 & 7 & 20 \\ 5 & 10 & 14 \\ 19 & 17 & 6 \\ 5 & 13 & 13 \end{bmatrix}$$

Den obigen Vereinbarungen entsprechend sind mittels der ersten und letzten drei Lochkarten die nachfolgenden Daten in der Form (beginnend in der ersten Spalte der Lochkarten)

```
100402
0104
00012000070000800005
.....................................
00005000130013
000000000
000000000
```

einzugeben.

2. Schrankenberechnung

Zur Berechnung unterer Schranken für die Klassen $S_{i_1,..,i_\lambda}$ wird die Schranke ${}^{*}\overline{F}^{3}_{i_1,..,i_\lambda}$, $(\lambda=1,..,m-1)$, benutzt.

Mit den oben angegebenen Festlegungen können wir nach (6.1) schreiben

$$
{}^{*}\overline{F}^{3}_{i_1,..,i_\lambda} = \max \Big[t_n + \sum_{i=1}^{m} \overline{t}_{i\,n} \; ;
$$

$$
\min_{i_m \in I_\lambda} \Big\{ \max_{v=LK2(1),..,LK2(NK1-1)} \Big\{ t_v + \sum_{i=1}^{m} \overline{t}_{i\,v}
$$

$$
+ \sum_{k=v}^{n-1} \max \Big[\max_{1\le l\le \lambda} \Big\{ \overline{T}_{i_l\,k} + \sum_{\varrho=l+1}^{\lambda} (\overline{T}_{i_\varrho\,k+1}
$$

$$
- \overline{T}_{i_\varrho\,k}) + \sum_{\mu \in I_\lambda} (\overline{t}_{\mu\,k+1} - \overline{t}_{\mu\,k}) \Big\} \; , \; \overline{T}_{i_m\,k} \Big] \Big\} \Big\} \Big] \; .
$$

Um die Schrankenberechnung zu vereinfachen werden folgende Hilfsgrößen berechnet (vgl. im FORTRAN- Programm 0030-0041) :

$$
IST(k) = \sum_{i=1}^{m} \overline{t}_{i\,k} \qquad , \; k=1,..,n \quad ;
$$

$\bar{t}_k = t + \overline{IST}(k)$, $k = IK2(1),..,IK2(IK1)$;

$\overline{IST}(k) = IST(k+1) - IST(k)$,

$\tilde{t}_{i\,k} = \bar{t}_{i\,k} - \bar{t}_{i\,k+1} + \bar{t}_{i\,k}$, $k=1,..,n-1$ und $i=1,..,m$.

Die Schrankenberechnung erfolgt, indem nachfolgende Größen ermittelt werden ($k=1,..,n-1$) :

$$IZ1(k) = \max_{1\le l\le\lambda-1} \Big\{ \bar{t}_{i_l k} + \sum_{\mu\in I_{\lambda-1}} (\bar{t}_{\mu\,k+1} - \bar{t}_{\mu k}) + \sum_{\varrho=l+1}^{\lambda-1} (\bar{t}_{i_\varrho\,k+1} - \bar{t}_{i_\varrho k}) \Big\},$$

$$LTH1(k) = \bar{t}_{i_{\lambda-1}\,k} + \sum_{\mu\in I_{\lambda-1}} (\bar{t}_{\mu\,k+1} - \bar{t}_{\mu\,k}) \quad , \lambda > 1 \ ;$$

$$LTH2(k) = \bar{t}_{i_\lambda k} + \sum_{\mu\in I_\lambda} (\bar{t}_{\mu\,k+1} - \bar{t}_{\mu\,k}) \ ,$$

$$IZ2(k) = \max_{1\le l\le\lambda} \Big\{ \bar{t}_{i_l\,k} + \sum_{\varrho=l+1}^{\lambda} (\bar{t}_{i_\varrho\,k+1} - \bar{t}_{i_\varrho\,k}) + \sum_{\mu\in I_\lambda} (\bar{t}_{\mu\,k+1} - \bar{t}_{\mu\,k}) \Big\} ,$$

$$IZ3(k) = \max \left[\bar{t}_{i_m\,k} \ , \ IZ2(k) \right] \ .$$

Hiermit ergibt sich

$$IZ2(k) = \max \left[IZ1(k) \ , \ LTH2(k) \right] \ ,$$

$$LTH2(k) = LTH1(k) - \bar{t}_{i_{\lambda-1}\,k} + \tilde{t}_{i_\lambda\,k} \quad , \ \lambda > 0 \ ;$$

$$*\bar{t}^{3}_{i_1,..,i_\lambda} = \max \Big[\bar{t}_n \ , \min_{i_m\in I_\lambda} \Big\{ \max_{v=LK2(1),..,LK2(IK1-1)} \Big[\bar{t}_v + \sum_{\nu=v}^{k-1} IV3(\nu) \Big] \Big\} \Big] .$$

$\lambda = 1,..,m-1$.

Im Programm wird für $\overline{F}^3_{i_1,\ldots,i_\lambda}$ die Bezeichnung IUS3 verwendet.

Bei der Berechnung der Schranken für alle Klassen $S_{i_1,\ldots,i_\lambda}$, die durch die Zerlegung der Klasse $S_{i_1,\ldots,i_{\lambda-1}}$ entstehen, werden zuerst die Größen LTH1(k) und IZ1(k) bestimmt. Danach können auf sehr einfache Weise für jede Klasse $S_{i_1,\ldots i_\lambda}$ die Größen LTH2(k), IZ2(k), IZ3(k) und die Schranke berechnet werden.
Die Ermittlung von LTH1(k) und IZ2(k) erfolgt nicht entsprechend den angegebenen Darstellungen, sondern mit Hilfe der Größen $\overline{IST}(k)$ und $\tilde{t}_{i\,k}$ (vgl. im Programm 00151-00164).

Im Programmabschnitt "Anfangs- und Näherungslösung" wird die Schrankenberechnung noch weiter vereinfacht. Es ist nämlich möglich, die Größen LTH2(k) und IZ2(k) , welche bei der Berechnung der Schranke einer ausgewählten Klasse $S_{i_1^*,\ldots,i_\lambda^*}$ (vgl. Kapitel 6) ermittelt wurden, als Größen LTH1(k) und IZ1(k) bei der Berechnung der Schranken für die Klassen $S_{i_1^*,\ldots,i_\lambda^*,i_{\lambda+1}}$, $i_{\lambda+1} \in I_\lambda$, zu verwenden.

3. Speicherung der Klassen und Schranken

Im vorliegenden FORTRAN- Programm wird für die Speicherung der Klassen, der dazugehörigen Zahlen λ und der Schranken ein Feld KL der Länge 12000 reserviert. Die Speicherung wird wie folgt durchgeführt (vgl. auch die leichte Modifikation in [6]) :

Auf einen Speicherplatz werden die Schranke IUS3 und die Zahl λ ($\lambda < m-1$) in der Form

$$IUS3 \cdot 100 + (m-\lambda)$$

und auf weiteren Speicherplätzen je 5 der zweistelligen Auftragsindizes in der Form

$$i_1 \cdot 100^4 + i_2 \cdot 100^3 + i_3 \cdot 100^2 + i_4 \cdot 100^1 + i_5$$

$$i_6 \cdot 100^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

gespeichert.

Die Anzahl der benötigten Speicherplätze ist gleich dem ganzen Teil von (m+9):5 . Demnach ist die Anzahl der (mehrelementigen) Klassen (einschließlich der Schranken und der Zahl λ), die gespeichert werden können, durch die Zahl

4000 , falls $6 \leq m \leq 10$ ist,

3000 , falls $11 \leq m \leq 15$ ist,

2400 , falls $16 \leq m \leq 20$ ist,

nach oben beschränkt.
Da der Ablauf des "Branch and Bound"- Verfahrens unter Einbeziehung des im Kapitel 6 beschriebenen Eliminationsprinzips erfolgt, ist im allgemeinen die Anzahl der betrachteten Klassen und der dabei berechneten Schranken wesentlich größer als obige Beschränkungen (vgl. z.B. die Beispiele 12 und 13 in Tabelle 6.2).
Falls z.B. m=42 ist, können höchstens 1200 Klassen (wie oben beschrieben) gespeichert werden. Dies verdeutlicht, daß es notwendig ist, für Probleme mit einer großen Anzahl von Variablen die Speicherung unter Verwendung externer Speicherungsmöglichkeiten zu organisieren.

Falls im Verlauf der Rechnung eine (mehrelementige) Klasse $S_{i_1,\ldots,i_\lambda}$ ausgewählt wird und die Anzahl der bisher belegten Speicherplätze im Feld KL größer als 11900 ist, wird bezüglich der ausgewählten Klasse $S_{i_1,\ldots,i_\lambda}$ eine "Näherungslösung" bestimmt. Dabei wird wie bei der Bestimmung einer Anfangslösung verfahren (anstelle von S wird die Menge $S_{i_1,\ldots,i_\lambda}$ betrachtet). Diese Regelung hat aber keine Bedeutung für den Ablauf des "Branch and Bound"- Verfahrens. Die Rechnung könnte sofort abgebrochen werden.

Es sei bemerkt, daß auf der Grundlage der angegebenen Form der Speicherung der Schranke und der Zahl λ für die jeweilige Klasse bei Gleichheit von Schranken durch die Auswahlfunktion eine Klasse ausgezeichnet wird, zu der ein größerer λ - Wert gehört.

4. Ausgabe

Zur Kontrolle werden LT, LF und die Kapazitätsbelastungen der Maschinen ausgegeben.
Während der Rechnung werden ausgedruckt

1. Die Klassen S_{i_1} , $i_1 = 1,..,m$, und die dazugehörigen unteren Schranken in der Form :

Schranke i_1

2. Die Anfangslösung und die dazugehörige Gesamtfertigungszeit in der Form :

BEARBEITUNGSZEIT = ...
REIHENFOLGE
i_1 i_2 .....i_λ

3. Einelementige Klassen C° und die dazugehörenden Zahlen C° ; die Anzahl der bisher berechneten Schranken ; die kleinste noch gespeicherte untere Schranke (vgl. Abschnitt 6.2) :

Schranke i_1 i_2 ..... i_{m-1}
SCHRANKENZAHL .....
KLEINSTE SCHRANKE = ...

4. Resultatsausgabe in der Form

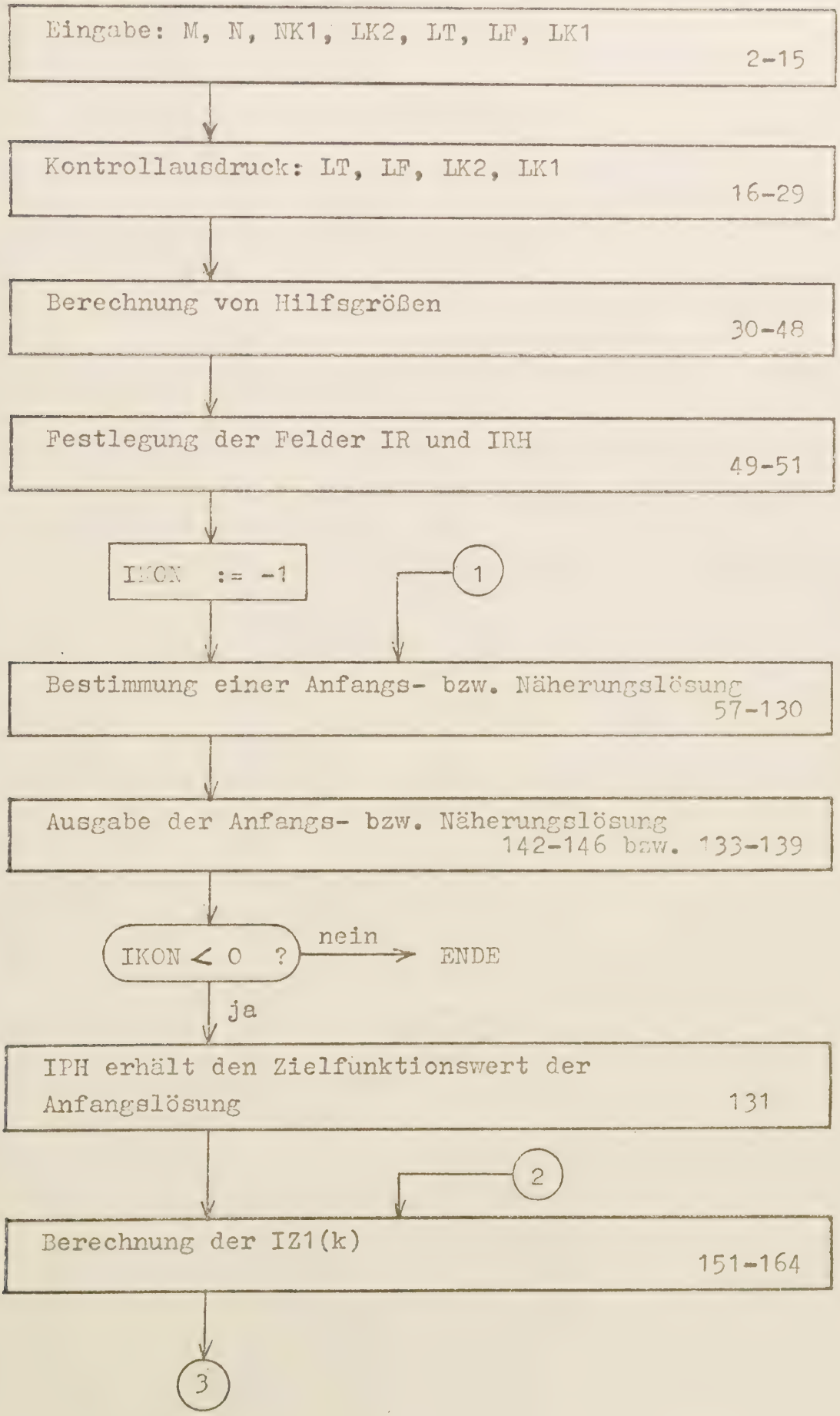
OPTIMALE REIHENFOLGE
i_1 i_2 ..... i_m
BEARBEITUNGSZEIT = ...
SCHRANKENZAHL .....

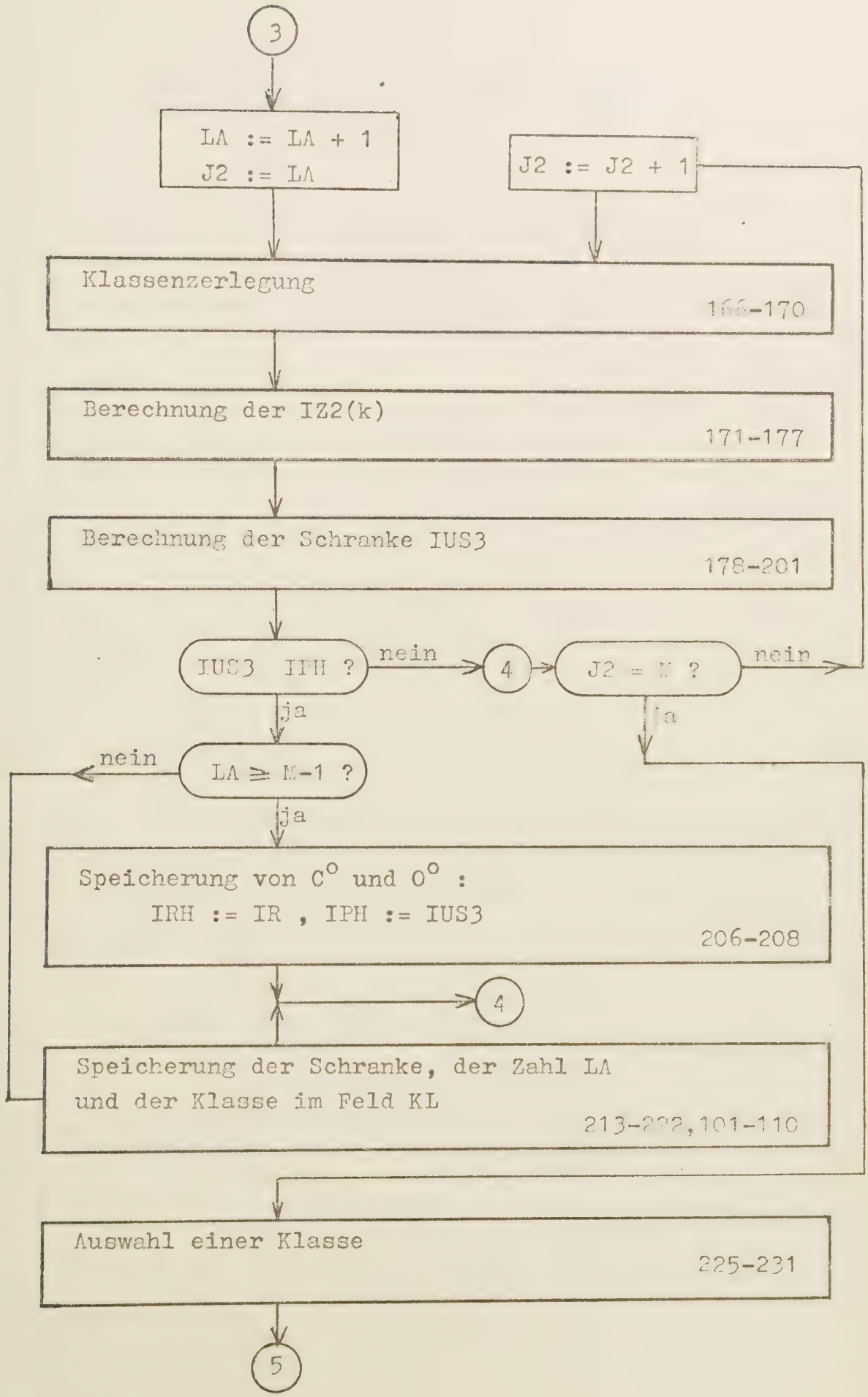
Falls keine optimale Reihenfolge bestimmt werden konnte, wird eine "Näherungslösung" ausgedruckt (s.h. oben) .

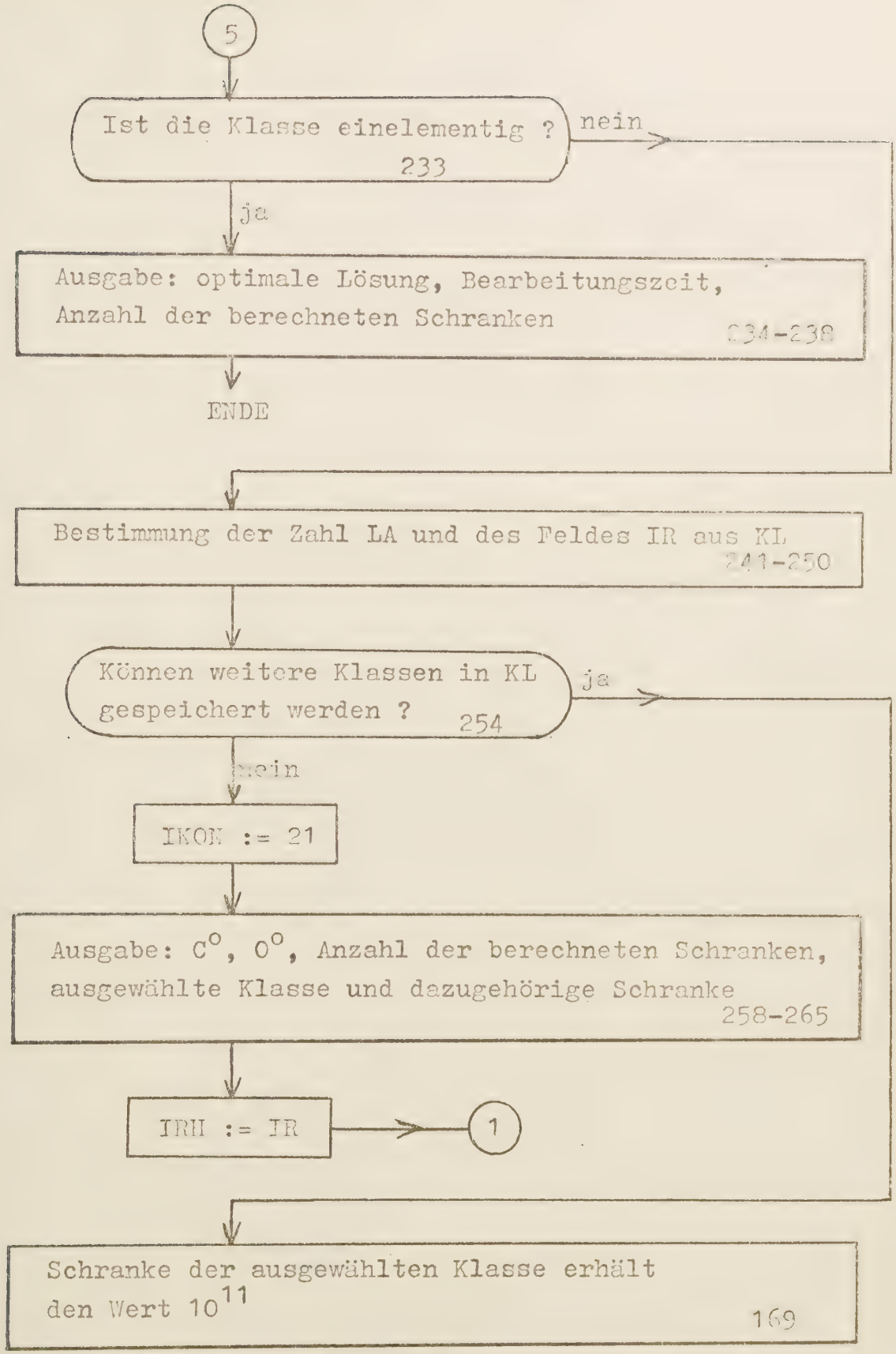
Für das oben angegebene Beispiel hat die Druckliste (für 1. bis 4.) das folgende Aussehen.

```
LA=0
          143       1
          149       2
          156       3
          142       4
          144       5
          147       6
          135       7
          142       8
          165       9
          147      10

ANFANG

BEARBEITUNGSZEIT =              154
REIHENFOLGE
  7  1  5  8  6  4 10  2  9  3


REIHENFOLGEOPT

          149       8  7  6  4 10  2  9  3  1
SCHRANKENZAHL                98
          147       8  7  6  4 10  2  9  3  5
SCHRANKENZAHL                99
KLEINSTE SCHRANKE =             143

          146       8  7  6  4  2  9 10  3  5
SCHRANKENZAHL               171
KLEINSTE SCHRANKE               144

          145       8  7  6  5  2  9  3 10  4
SCHRANKENZAHL               365

OPTIMALE REIHENFOLGE

  8  7  6  5  2  9  3 10  4  1
BEARBEITUNGSZEIT =              145
SCHRANKENZAHL                365
```

5. Ablaufplan und das FORTRAN- codierte Programm




3
LA := LA + 1
J2 := LA
J2 := J2 + 1
Klassenzerlegung
166-170
Berechnung der IZ2(k)
171-177
Berechnung der Schranke IUS3
178-201
IUS3 IPH ?
nein
4
J2 = M ?
nein
ja
ja
nein
LA ≥ M-1 ?
ja
Speicherung von C° und O° :
IRH := IR , IPH := IUS3
206-208
4
Speicherung der Schranke, der Zahl LA
und der Klasse im Feld KL
213-222,101-110
Auswahl einer Klasse
225-231
5


5
Ist die Klasse einelementig ?
233
nein
ja
Ausgabe: optimale Lösung, Bearbeitungszeit,
Anzahl der berechneten Schranken
234-238
ENDE
Bestimmung der Zahl LA und des Feldes IR aus KL
241-250
Können weitere Klassen in KL
gespeichert werden ?
254
ja
nein
IKON := 21
Ausgabe: C°, O°, Anzahl der berechneten Schranken,
ausgewählte Klasse und dazugehörige Schranke
258-265
IRH := IR
1
Schranke der ausgewählten Klasse erhält
den Wert 10^11
169

```
00001            PROGRAM REP3S3
                 C                        REP 3      SCHRANKE 3
                 C
00002              DIMENSION LT(20,10),LE(20,9),LK1(10),L
                  1KL(12000),IST(10),IZ1(9),IZ2(9),IZ3(9),
                  2LTM1(9),LTM2(9),IZO(9),LTMO(9),IR(20),
00003              READ 1, M,N,NK1
00004            1 FORMAT (3I2)
00005              READ 2, (LK2(I),I=1,NK1)
00006            2 FORMAT (10I2)
00007              DO 13 I=1,M
00008           13 READ 3, (LT(I,J),J=1,N)
00009            3 FORMAT (10I5)
00010              NE=N-1
00011              DO 14 I=1,M
00012           14 READ 3, (LE(I,J),J=1,NE)
00013              DO 16 J=1,NK1
00014           16 READ 4, LK1(J)
00015            4 FORMAT (I9)
00016              PRINT 5
00017            5 FORMAT (10H1MATRIX LT)
00018              DO 7 I=1,M
00019            7 PRINT 6, (LT(I,J),J=1,N)
00020            6 FORMAT (1H 10I7)
00021              PRINT 8
00022            8 FORMAT (10H MATRIX LE)
00023              DO 9 I=1,M
00024            9 PRINT 6, (LE(I,J),J=1,NE)
00025              PRINT 11
00026           11 FORMAT (13H KAPAZITAETEN)
00027              DO 15 J=1,NK1
00028           15 PRINT 12, LK2(J),LK1(J)
00029           12 FORMAT (9H MASCHINR,I4,I12)
                 C
                 C BERECHNUNG VON HILFSGROESSEN
00030              DO 21 J=1,N
00031              IST(J)=0
00032              DO 21 I=1,M
00033           21 IST(J)=LE(I,J)+IST(J)
00034              DO 22 J=1,NK1
00035              I=LK2(J)
00036           22 LK1(J)=LK1(J)+IST(I)
00037              DO 23 J=1,NE
00038              J1=J+1
00039              IST(J)=IST(J1)-LK2(J)
00040              DO 23 I=1,M
00041           23 LT(I,J)=LE(I,J)-LT(I,J1)+LT(I,J)
00042              NK=NK1-1
00043              M1=M+1
00044              M3=(M+4)/5
00045              M2=M3*5
00046              M4=M3+1
00047              LMB=-1
00048              KONST=10**11
                 C
                 C DEFINITION DES FELDES IR UND IRH
00049              DO 25 I=1,M2
00050              IR(I)=I
00051           25 IRH(I)=I
```

```
C
C ANFANGS-UND NAEHERUNGSLOESUNG
00052          IKON=-1
00053          LA=0
00054          IF=0
00055          IRINT 27
00056       27 FORMAT (5H1LA=0)
00057       31 ISU=KONST
00058          LA=LA+1
00059          DO 32 J1=LA,M
00060          I2=IR(LA)
00061          IR(LA)=IR(J1)
00062          IR(J1)=I2
00063          I3=IR(LA)
00064          IF (LA-1) 33,33,34
00065       33 DO 35 N1=1,NE
00066          LTH2(N1)=IS?(N1)+LT(I3,N1)
00067       35 IZ2(N1)=LTH2(N1)
00068          GO TO 36
00069       34 DO 37 N1=1,NE
00070          LTH2(N1)=LTH1(N1)+LT(I3,N1)
00071          IZ2(N1)=IZ1(N1)
00072          IF (IZ2(N1)-LTH2(N1)) 38,39,39
00073       38 IZ2(N1)=LTH2(N1)
00074       39 CONTINUE
00075       37 CONTINUE
C
00076       36 IUS3=KONST
00077          I4=LA+1
00078          DO 43 J2=I4,M
00079          I5=IR(J2)
00080          DO 44 N2=1,NE
00081          IZ3(N2)=IZ2(N2)
00082          IF (IZ3(N2)-LT(I5,N2)) 45,46,46
00083       45 IZ3(N2)=LT(I5,N2)
00084       46 CONTINUE
00085       44 CONTINUE
C
00086          IUS1=LK1(NK1)
00087          DO 48 N3=1,NK
00088          N4=LK2(N3)
00089          IUS2=LK1(N3)
00090          DO 49 N5=N4,NE
00091       49 IUS2=IUS2+IZ3(N5)
00092          IF (IUS1-IUS2) 51,52,52
00093       51 IUS1=IUS2
00094       52 CONTINUE
00095       48 CONTINUE
00096          IF (IUS1-IUS3) 53,54,54
00097       53 IUS3=IUS1
00098       54 CONTINUE
00099       43 CONTINUE
C
00100          IF (IKON+1) 211,211,212
00101      211 IK=IK+1
00102          KL(IK)=IUS3*100+M-1
00103          DO 213 J4=1,M3
00104          J7=IK+J4
00105          KL(J7)=0
00106          DO 214 J5=1,5
00107          J6=(J4-1)*5+J5
00108      214 KL(J7)=KL(J7)*100+IR(J6)
00109      213 CONTINUE
00110          IK=J7
00111          PRINT 666, IUS3,(IR(I),I=1,I
```

```
00112          666 FORMAT (1H ,I12,4X,20I3)
00113          212 CONTINUE
00114              IF (IUS3-ISU) 55,56,56
00115           55 ISU=IUS3
00116              DO 57 J3=1,M
00117           57 IZ0(J3)=IZ2(J3)
00118              DO 58 N5=1,ME
00119              IZ0(N5)=IZ2(N5)
00120           58 LTH0(N5)=LTH2(N5)-LF(I3,N5)
00121           56 CONTINUE
00122           32 CONTINUE
               C
00123              IF (LA-M+1) 59,61,61
00124           59 DO 162 J5=LA,M
00125          162 ID(J5)=IT(J5)
00126              DO 177 N5=1,ME
00127              IZ1(N5)=IZ0(N5)
00128          177 LTH1(N5)=LTH0(N5)
00129              GO TO 31
00130           61 CONTINUE
00131              IUS=ISU
               C
               C AUSGABE DER NAEHERUNGS-BZW.ANFANGSLOESUNG
00132              IF (-ISU) 62,63,63
00133           62 PRINT 64
00134           64 FORMAT (18H NAEHERUNGSLOESUNG//)
00135              PRINT 65, ISU
00136           65 FORMAT (19H BEARBEITUNGSZEIT =,2X,I12)
00137              PRINT 67
00138           67 FORMAT (13H REIHENFOLGE )
00139              PRINT 68, (IRU(I),I=1,M)
00140           68 FORMAT (1H ,20I3)
00141              GO TO 161
00142           63 PRINT 71
00143           71 FORMAT (//7H ANFANG/)
00144              PRINT 65, ISU
00145              PRINT 67
00146              PRINT 68, (IRU(I),I=1,M)
00147              IRS=M
00148              PRINT 333
00149          333 FORMAT (//15H REIHENFOLGEOPT/)
00150              GO TO 160
               C
               C BERECHNUNG DER IZ1(K)
               C
               C BERECHNUNG DER IZ1(K)
00151          111 I3=ID(1)
00152              DO 112 N1=1,ME
00153              IZ1(N1)=IZ0(N1)+LT(I3,N1)
00154              LTH1(N1)=IZ1(N1)-LT(I3,N1)
00155              IF (1-IA) 113,114,114
00156          113 DO 118 J1=2,LA
00157              I4=ID(J1)
00158              LTH1(N1)=LTH1(N1)+LT(I4,N1)
00159              IF (IZ1(N1)-LTH1(N1)) 116,117,117
00160          116 IZ1(N1)=LTH1(N1)
00161          117 LTH1(N1)=LTH1(N1)-LT(I4,N1)
00162          118 CONTINUE
00163          114 CONTINUE
00164          112 CONTINUE
               C
               CKLASSENAUFTEILUNG
00165          115 I=IA+1
```

```
00166           DO 121 J2=LA,M
00167           I5=IR(LA)
00168           IR(LA)=IR(J2)
00169           IR(J2)=I5
00170           I6=IR(LA)
                C
                C BERECHNUNG DER IS2(K)
00171           DO 122 N2=1,NE
00172           LTH2(N2)=LTH1(N2)+LT(J6,N2)
00173           IS2(N2)=IS1(N2)
00174           IF (IS2(L2)-LTH2(N2)) 123,124,1
00175         123 IS2(N2)=LTH2(N2)
00176         124 CONTINUE
00177         122 CONTINUE
                C
                C UEBERPRUEFUNG DER BEDINGUNG
00178           IUS2=ICONST
00179           I7=J6+1
00180           DO 12
00181           I8=I
00182           DO 12
00183           IW3(
00184           IF (I
00185         127 IW3(
00186         128 CONTINUE
00187         126 CONTINUE
                C
00188           IUS1=IW1(NW1)
00189           DO 130 I4=
00190           N5=LW2(I4)
00191           IUS2=IW1(I4)
00192           DO 131 I6=N5,NE
00193         131 IUS2=IUS2+IS3(I6)
00194           IF (IUS1-IUS2) 132,133,133
00195         132 IUS1=IUS2
00196         133 CONTINUE
00197         130 CONTINUE
00198           IF (IUS1-IUS3) 134,135,135
00199         134 IUS3=IUS1
00200         135 CONTINUE
00201         125 CONTINUE
00202           IBZ=IBZ+1
00203         142 CONCAT (I12)
                C
                C VERGLEICH MIT  IIH
00204           IF (IUS3-IIH) 136,137,137
                C
                C SPEICHERUNG DER KLASSE
00205         136 IF (M-1-LA) 143,143,144
00206         143 IPH=IUS3
00207           DO 146 J8=1,M
00208         146 IPH(J8)=IR(J8)
00209           PRINT 666, IUS3,(IR(I),I=1,LA)
00210           PRINT 172, IBZ
00211           IHP=0
00212           GO TO 137
00213         144 IK=IK+1
00214           KL(IK)=IUS3*100+(M-LA)
00215           DO 138 J4=1,M3
00216           J7=IK+J4
00217           KL(J7)=0
00218           DO 139 J5=1,5
```

```
00219            J6=(J4-1)*5+
                 [illegible]
00221          138 CONTINUE
00222              IK=J7
00223          137 CONTINUE
00224          121 CONTINUE
               C
               C BESTIMMUNG DER KLEINSTEN SCHRA
00225          160 KLH=IIP*100
00226              IH=-1
00227              DO 150 J12=1,IK,4
00228              IF (KL(J12)-KLH) 153,152,152
00229          153 KLH=KL(J12)
00230              IH=J12
00231          152 CONTINUE
00232          150 CONTINUE
               C
               C TEST DER OPTIMALITAET
00233              IF (LA) 156,157,157
00234          156 PRINT 171
00235          171 FORMAT (/21H OPTIMALE REIHENFOLGE/)
00236              PRINT 68, (IRH(I),I=1,M)
00237              PRINT 65, IHH
00238              PRINT 172, IBZ
00239          172 FORMAT (17H SCHRANKENZAHL   ,I12)
00240              GO TO 161
00241          157 LAH=KLH/100
00242              LA=M-KLH+LAH*100
00243              DO 154 J13=1,M3
00244              J16=LH+J13
00245              JZO=(J13-1)*5
00246              DO 155 J14=1,5
00247              J15=JZO+J14
00248              IR(J15)=KL(J16)/100**(5-J14)
00249          155 KL(J16)=KL(J16)-IR(J15)*100**(5-J14)
00250          154 CONTINUE
               C
00251              IF (LHB) 188,189,189
00252          189 PRINT 183, LAH
00253              LHB=-1
00254          188 IF (11900-IK) 158,159,159
00255          158 IKON=21
00256              PRINT 181
00257          181 FORMAT (10H1NAEHERUNG//)
00258              PRINT 182
00259          182 FORMAT (21H EINELEMENTIGE KLASSE)
00260              PRINT 68, (IRH(I),I=1,M)
00261              PRINT 65, IHH
00262              PRINT 183, LAH
00263          183 FORMAT (22H KLEINSTE SCHRANKE =  ,I12/)
00264              PRINT 68, (IR(I),I=1,LA)
00265              PRINT 172, IBZ
00266              DO 222 J16=1,M
00267          222 IRH(J16)=IR(J16)
00268              GO TO 31
               C
00269          159 KL(LH)=KONST
00270              GO TO 111
               C
00271          161 CONTINUE
00272              STOP
00273              END
```

Anlage 2

Berechnungstabellen zum Kapitel 7

In allen Tabellen sind in der ersten Spalte die Indizes $i_1,..,i_\lambda$ der betrachteten Klassen $S_{i_1,..,i_\lambda}$ vermerkt. Die letzten Spalten der Tabellen enthalten die berechneten Schranken.
In den dritten Spalten sind untereinander die (jeweiligen) Größen $x_{\lambda v}$ $(v=1,..,n)$, die bei der Berechnung der Schranken für Klassen $S_{i_1,..,i_\lambda}$ zu ermitteln sind, angegeben. Die zweiten Spalten enthalten die Indizes v , v=1,..,n .
Die Rechnungen zur Bestimmung der Größen $x_{\lambda v}$, v=1,..,n , sind in den Tabellen nicht berücksichtigt. Auf der Grundlage der im Abschnitt 3.2 hergeleiteten rekursiven Darstellungen der Fertigstellungszeiten der Aufträge $A_{i_1},..,A_{i_\lambda}$ auf den (jeweiligen) Maschinen lassen sich die Rechnungen zweckmäßig durchführen.

Die Probleme RFP* 1, RFP* 2 (Beispiel 7.1) und RFP* 2 (Beispiel 7.3) - Tabellen 1 , 2 und 6

Für alle Indizes $i_m \in I_\lambda$ sind untereinander die Maximierungsglieder

$$- {}^*x_{\lambda v} + {}^*W_{\lambda,v,0} \qquad \text{(mit } {}^*W_{\lambda,v,0} \text{ nach (5.5.21))}$$

angegeben. Die Maxima

$$\max_{v \in \mathcal{A}(I_\lambda)} \{ {}^*x_{\lambda v} + {}^*W_{\lambda,v,0} \}$$

sind unterstrichen.
Bei allen betrachteten Klassen ist $\mathcal{A}(I_\lambda) = \{1,..,n\}$.

Die Probleme $\overline{\text{RFP}}$ 1 ($\overline{C}^1$- Schranke) und $\overline{\text{RFP}}$ 3 - Tabellen 3 und 5

OR Optimale Reihenfolgen der zu lösenden (fiktiven) Zwei-Maschinen- Probleme.
Die Rüstzeitenabschätzungen erfolgen nach (5.4.11).
Die optimalen Reihenfolgen werden nach Abschnitt 5.3 unter Verwendung der Johnson'schen Regel ermittelt.

FZ Für v=1 und v=2 : Minima der (fiktiven) Zwei-Maschinen- Probleme, d.h.

$$\min \{ {}^{*}\overline{\Pi}_{v,3-v,\lambda}(p_\lambda) \;/\; p_\lambda \in S(I_\lambda) \} \quad .$$

Für v=3 : $\sum_{1 \in I_\lambda} (t_{1\,3} + r_{1\,3})$

$$= \min \{ {}^{*}\overline{\Pi}_{3,0,\lambda}(p_\lambda) \;/\; p_\lambda \in S(I_\lambda) \} \quad .$$

TS Teilsummen

$$\overline{x}_{\lambda v} + \min \{ {}^{*}\overline{\Pi}_{v,3,\lambda}(p_\lambda) \;/\; p_\lambda \in S(I_\lambda) \} \quad .$$

Das Maximum (über v = 1,2,3) ist jeweils unterstrichen.

Das Problem $\overline{\text{RFF}}$ 1 - Tabelle 4

Für jeden Index $i_m \in I_\lambda$ sind untereinander die Maximierungsglieder (v=1,2,3)

$$\overline{x}^{1}_{\lambda\, v} + \sum_{1 \in I_\lambda} (t_{1\,v} + r_{1\,v}) + \sum_{\eta=v+1}^{3} (t_{i_m \eta} + f_{i_m \eta-1}) \,,$$

angegeben, wobei die Rüstzeitenabschätzung nach (5.4.11) erfolgt.
Die Maxima (über v = 1,2,3) sind jeweils unterstrichen.

Tabelle 1 : RFP* 1 (Beispiel 7.1)

$i_1,..,i_\lambda$	v	$*x^1_{\lambda v}$	$i_m=1$	$i_m=2$	$i_m=3$	$i_m=4$	$i_m=5$	Schranke
1	1	4		35	33	30	30	
	2	9		32	32	32	39	
	3	0		26	22	28	30	39
	4	18		39	39	39	39	
2	1	8	30		33	30	30	
	2	1	33		32	32	39	
	3	20	33		33	39	41	49
	4	24	49		49	49	49	
3	1	12	30	35		30	30	
	2	18	42	42		42	48	
	3	26	47	47		49	51	47
	4	9	37	37		37	37	
4	1	7	33	35	33		33	
	2	1	33	32	32		29	
	3	12	29	33	29		37	37
	4	18	37	37	37		37	
5	1	4	30	35	33	30		
	2	8	33	32	32	32		
	3	15	34	38	34	40		42
	4	23	42	42	42	42		
4,1	1	7		35	33		33	
	2	9		32	32		39	
	3	12		33	29		37	37
	4	25		37	37		37	
4,2	1	11	33		33		33	
	2	1	33		32		39	
	3	23	31		31		39	43
	4	27	43		43		43	
4,3	1	15	35	35			35	
	2	21	45	45			51	
	3	29	45	45			49	45
	4	18	37	37			37	
4,5	1	7	33	35	33			
	2	8	33	32	32			
	3	15	29	33	29			37
	4	27	37	37	37			
4,1,2	1	11			33		33	
	2	9			32		39	
	3	23			31		39	37
	4	28			37		37	
4,1,3	1	15		35			35	
	2	21		43			43	
	3	29		45			49	45
	4	25		37			37	

Tabelle 1 (Fortsetzung)

$i_1,..,i_\lambda$	v	$^*x^1_{\lambda v}$	$i_m=1$	$i_m=2$	$i_m=3$	$i_m=4$	$i_m=5$	Schranke
4,1,5	1	7		35	33			
	2	16		32	32			
	3	23		41	37			37
	4	34		37	37			
4,1,2,3	1	19					19	
	2	25					47	
	3	33					44	47
	4	28					37	
4,1,2,5	1	11			33			
	2	16			32			
	3	26			31			37
	4	37			37			

Tabelle 2 : RFF* 2 (Beispiel 7.1)

$i_1,..,i_\lambda$	v	$^*x^2_{\lambda v}$	$i_m=1$	$i_m=2$	$i_m=3$	$i_m=4$	$i_m=5$	Schranke
1	1	4		35	33	30	30	
	2	9		32	32	32	39	
	3	0		26	22	28	30	39
	4	18		39	39	39	39	
2	1	8	30		33	30	30	
	2	1	33		32	32	39	
	3	20	33		33	39	41	49
	4	24	49		49	49	49	
3	1	12	30	35		30	30	
	2	18	42	42		42	48	
	3	26	47	47		49	51	47
	4	9	37	37		37	37	
4	1	7	33	35	33		33	
	2	1	33	32	32		39	
	3	12	29	33	29		37	37
	4	18	37	37	37		37	
5	1	4	30	35	33	30		
	2	8	33	32	32	32		
	3	15	34	38	34	40		42
	4	23	42	42	42	42		
4,1	1	7		35	33		33	
	2	16		39	39		46	
	3	12		33	29		37	39
	4	25		37	37		37	
4,2	1	11	33		33		33	
	2	1	33		32		39	
	3	23	31		31		39	43
	4	27	43		43		43	

Tabelle 2 (Fortsetzung)

$i_1,..,i_\lambda$	v	$\chi^2_{\lambda v}$	$i_m=1$	$i_m=2$	$i_m=3$	$i_m=4$	$i_m=5$	Schranke
4,3	1	15	35	35			35	
	2	21	45	45			51	
	3	29	45	45			79	45
	4	18	37	37			37	
4,5	1	7	33	35	33			
	2	12	37	36	36			
	3	19	33	37	33			37
	4	27	37	37	37			
4,5,1	1	7		35	33			
	2	25		41	41			
	3	19		37	37			41
	4	34		37	37			
4,5,2	1	16	38		38			
	2	12	37		36			
	3	28	33		33			39
	4	32	39		39			
4,5,3	1	15	35	35				
	2	21	38	38				
	3	29	42	42				42
	4	27	37	37				
4,5,2,1	1	16			38			
	2	30			46			
	3	28			33			46
	4	39			39			
4,5,2,3	1	24	24					
	2	30	47					
	3	38	38					47
	4	32	39					
4,1,2	1	12			34		34	
	2	16			39		46	
	3	24			32		40	39
	4	28			37		37	
4,1,3	1	18		38			38	
	2	24		46			46	
	3	32		48			52	48
	4	25		37			37	
4,1,5	1	7		35	33			
	2	23		39	39			
	3	30		48	44			44
	4	38		41	41			
4,1,2,3	1	20					20	
	2	26					48	
	3	34					45	48
	4	28					37	

Tabelle 2 (Fortsetzung)

$i_1,..,i_\lambda$	v	$^*x^2_{\lambda v}$	$i_m=1$ $i_m=2$ $i_m=3$ $i_m=4$ $i_m=5$	Schranke
4,1,2,5	1	12	34	
	2	23	39	
	3	30	35	39
	4	38	38	

Tabelle 3 : RFP 1 (Beispiel 7.2 , $\bar{C}^1$ - Schranke)

$i_1,..,i_\lambda$	v	$\bar{x}^1_{\lambda v}$	OR	FZ	TS	Schranke
1	1	27	(3,4,2,5)	141	168	
	2	56	(3,5,4,2)	121	177	185
	3	87		98	185	
2	1	26	(3,4,1,5)	146	172	
	2	58	(3,5,4,1)	129	187	187
	3	84		94	172	
3	1	27	(4,2,1,5)	148	172	
	2	50	(5,4,1,2)	133	183	183
	3	69		98	167	
4	1	20	(3,2,1,5)	147	167	
	2	40	(3,5,1,2)	132	172	172
	3	75		93	168	
5	1	27	(3,4,2,1)	144	171	
	2	50	(3,4,1,2)	135	185	185
	3	73		97	176	
4,1	1	45	(3,2,5)	124	179	
	2	74	(3,5,2)	98	172	181
	3	105		76	181	
4,2	1	44	(3,1,5)	129	173	
	2	76	(3,5,1)	106	182	183
	3	106		77	183	
4,3	1	39	(2,1,5)	129	168	
	2	62	(5,1,2)	110	172	173
	3	97		76	173	
4,5	1	50	(3,2,1)	128	178	
	2	73	(3,1,2)	112	185	185
	3	98		80	178	
4,3,1	1	63	(2,5)	103	166	
	2	96	(5,2)	76	172	182
	3	131		51	182	
4,3,2	1	66	(1,5)	109	175	
	2	98	(5,1)	84	182	182
	3	124		51	175	

Tabelle 3 (Fortsetzung)

$i_1,..,i_\lambda$	v	$\overline{x}^1_{\lambda v}$	CR	FZ	TS	Schranke
4,3,5	1	67	(2,1)	106	173	
	2	90	(1,2)	91	181	181
	3	120		54	174	
4,3,5,1	1	92	(2)	79	171	
	2	123	(2)	56	179	181
	3	154		27	181	
4,3,5,2	1	92	(1)	90	182	
	2	124	(1)	66	190	190
	3	148		27	175	

Tabelle 4 : $\overline{RFF}$ 1 (Beispiel 7.2 , $\overline{B}^1$ - Schranke)

$i_1,..,i_\lambda$	v	$\overline{x}^1_{\lambda v}$	i_m=1	i_m=2	i_m=3	i_m=4	i_m=5	Schranke
1	1	27		171	155	159	159	
	2	56		177	170	177	174	185
	3	87		185	185	185	185	
2	1	26	175		157	161	161	
	2	58	187		175	182	179	178
	3	84	178		178	178	178	
3	1	27	178	176		164	164	
	2	50	187	182		182	179	179
	3	69	167	167		167	167	
4	1	20	170	168	152		156	
	2	40	176	171	164		168	168
	3	75	168	168	168		168	
5	1	27	171	169	153	157		
	2	50	189	184	177	184		177
	3	73	170	170	170	170		
4,1	1	45		172	156		160	
	2	74		172	165		169	181
	3	105		181	181		181	
4,2	1	44	176		158		162	
	2	76	182		170		174	183
	3	106	183		183		183	
4,3	1	39	170	168			156	
	2	62	176	171			168	173
	3	97	173	173			173	
4,5	1	50	177	175	159			
	2	73	189	184	177			178
	3	98	178	178	178			

Tabelle 4 (Fortsetzung)

$i_1,..,i_\lambda$	v	$\bar{x}^1_{\lambda v}$	i_m=1	i_m=2	i_m=3	i_m=4	i_m=5	Schranke
4,3,1	1	63		168			156	
	2	96		172			169	182
	3	131		182			182	
4,3,2	1	66	177				163	
	2	98	182				174	175
	3	124	175				175	
4,3,5	1	67	173	171				
	2	90	184	179				179
	3	120	174	174				
4,3,2,1	1	96					168	
	2	133					176	193
	3	164					193	
4,3,2,5	1	100	185					
	2	128	192					192
	3	151	180					
5,1	1	52		170	154	158		
	2	83		184	177	184		189
	3	114		189	189	189		
5,2	1	52	175		157	161		
	2	84	193		181	188		181
	3	110	181		181	181		
5,3	1	58	183	181		169		
	2	82	203	198		198		198
	3	101	177	177		177		
5,4	1	54	179	177	161			
	2	81	202	197	190			190
	3	107	183	183	183			
4,5,1	1	75		176	166			
	2	106		184	177			190
	3	137		190	190			
4,5,2	1	75	181		163			
	2	107	194		182			187
	3	133	187		187			
4,5,3	1	81	186	184				
	2	105	200	195				195
	3	127	180	180				
2,1	1	56			163	167	167	
	2	93			177	184	181	196
	3	124			196	196	196	
2,3	1	50	180			166	166	
	2	90	197			192	189	189
	3	112	184			184	189	
2,4	1	54	183		165		169	
	2	82	188		176		180	184
	3	117	184		184		184	

Tabelle 4 (Fortsetzung)

$i_1,..,i_\lambda$	v	$\bar{x}^1_{\lambda v}$	$i_m=1$	$i_m=2$	$i_m=3$	$i_m=4$	$i_m=5$	Schranke
2,5	1	60	183		165	169		
	2	88	197		185	192		185
	3	111	182		182	182		
4,3,5,1	1	92		171				
	2	123		179				181
	3	154		181				
4,3,5,2	1	92	182					
	2	124	190					190
	3	148	175					
3,1	1	51		178		166	166	
	2	84		184		184	181	192
	3	115		192		192	192	
3,2	1	54	187			173	173	
	2	86	194			189	186	186
	3	112	184			184	184	
3,4	1	47	179	177			165	
	2	73	187	182			179	179
	3	101	173	173			173	
3,5	1	55	183	181		169		
	2	78	196	191		191		191
	3	101	177	177		177		
3,4,1	1	72		177			165	
	2	106		182			179	188
	3	137		188			188	
3,4,2	1	71	182				168	
	2	109	193				185	186
	3	135	186				186	
3,4,5	1	77	183	181				
	2	100	194	189				189
	3	124	178	178				

Tabelle 5 : $\overline{RFP}$ 3 (Beispiel 7.2)

$i_1,..,i_\lambda$	v	$\bar{x}^3_{\lambda v}$	OR	FZ	TS	Schranke
1	1	27	(3,4,2,5)	141	168	
	2	56	(3,5,4,2)	121	177	185
	3	87		98	185	
2	1	26	(3,4,1,5)	146	172	
	2	58	(3,5,4,1)	129	187	187
	3	84		94	178	

Tabelle 5 (Fortsetzung)

$i_1,..,i_\lambda$	v	$\bar{x}^3_{\lambda v}$	OR	FZ	TS	Schranke
3	1	27	(4,2,1,5)	148	172	
	2	50	(5,4,1,2)	133	183	183
	3	69		98	167	
4	1	20	(3,2,1,5)	147	167	
	2	40	(3,5,1,2)	132	172	172
	3	75		93	168	
5	1	27	(3,4,2,1)	144	171	
	2	50	(3,4,1,2)	135	185	185
	3	73		97	170	
4,1	1	45	(3,2,5)	124	179	
	2	74	(3,5,2)	98	172	181
	3	107		76	181	
4,2	1	44	(3,1,5)	129	173	
	2	76	(3,5,1)	106	182	183
	3	106		77	183	
4,3	1	39	(2,1,5)	129	168	
	2	62	(5,1,2)	110	172	173
	3	97		76	173	
4,5	1	50	(3,2,1)	128	176	
	2	73	(3,1,2)	112	185	185
	3	100		80	180	
4,3,1	1	63	(2,5)	103	166	
	2	96	(5,2)	76	172	182
	3	131		51	182	
4,3,2	1	66	(1,5)	109	175	
	2	98	(5,1)	84	182	182
	3	124		51	175	
4,3,5	1	67	(2,1)	106	173	
	2	90	(1,2)	91	181	181
	3	120		54	174	
4,3,5,1						181
4,3,5,2						190

Tabelle 6 : RFP* 2 (Beispiel 7.3)

$i_1,..,i_\lambda$	v	$*\bar{x}^2_{\lambda v}$	i_m=1	i_m=2	i_m=3	i_m=4	i_m=5	Schranke
1	1	0		27	26	25	26	
	2	6		24	24	24	26	25
	3	0		21	19	24	25	
	4	11		24	24	24	24	

Tabelle 6 (Fortsetzung)

$i_1,..,i_\lambda$	v	$^*x^2_{\lambda v}$	$i_m=1$	$i_m=2$	$i_m=3$	$i_m=4$	$i_m=5$	Schranke
2	1	5	26		26	25	26	
	2	0	23		24	24	26	
	3	15	24		24	29	30	33
	4	17	33		33	33	33	
3	1	3	26	27		25	26	
	2	8	26	26		27	29	
	3	14	29	29		32	33	29
	4	0	18	18		18	18	
4	1	2	26	27	26		26	
	2	6	25	25	26		28	
	3	7	25	27	25		31	26
	4	12	25	25	25		25	
5	1	5	26	27	26	25		
	2	8	28	28	29	29		
	3	10	28	30	28	33		28
	4	16	28	28	28	28		
1,2	1	5			26	25	26	
	2	6			24	24	26	
	3	15			24	29	30	28
	4	17			28	28	28	
1,3	1	6		30		28	29	
	2	11		24		24	26	
	3	17		32		35	36	32
	4	11		24		24	24	
1,4	1	4		29	28		28	
	2	10		24	24		26	
	3	11		31	29		35	29
	4	16		24	24		24	
1,5	1	6		28	27	26		
	2	9		24	24	24		
	3	11		30	28	33		28
	4	17		24	24	24		
4,1	1	2		27	26		26	
	2	12		26	26		28	
	3	7		27	25		31	26
	4	17		25	25		25	
4,2	1	7	26		26		26	
	2	6	25		26		28	
	3	17	25		25		31	30
	4	19	30		30		30	
4,3	1	6	27	28			27	
	2	11	25	25			28	
	3	17	31	31			35	31
	4	12	25	25			25	
4,5	1	7	26	27	26			
	2	10	26	26	27			
	3	12	28	30	28			28
	4	18	25	25	25			

Tabelle 6 (Fortsetzung)

$i_1,\ldots,i_\lambda$	v	$^*x^2_{\lambda v}$	$i_m=1$	$i_m=2$	$i_m=3$	$i_m=4$	$i_m=5$	Schranke
4,1,2	1	7			26		25	
	2	12			26		28	26
	3	17			25		31	
	4	19			25		25	
4,1,3	1	12		34			33	
	2	17		28			28	
	3	23		37			41	37
	4	17		25			25	
4,1,5	1	12		32	31			
	2	15		26	26			33
	3	17		35	33			
	4	23		31	29			
4,1,2,3	1	12					28	
	2	17					28	
	3	23					31	31
	4	19					25	
4,1,2,5	1	14			28			
	2	17			28			28
	3	19			25			
	4	25			25			

T H E S E N

zur Dissertation (A)

E i n B e i t r a g z u r R e i h e n f o l g e -

p r o b l e m a t i k

vorgelegt von

Dipl.- Math. Reinhard Mandel

1. Zahlreiche praktische Entscheidungsprobleme (besonders bei der Organisation von Einzel- oder Kleinserienfertigungsprozessen) führen auf Reihenfolgeprobleme als mathematische Optimierungsmodelle.

2. Es werden Reihenfolgeprobleme mit gleichen Auftrags- und Maschinenfolgen untersucht.
Neben den Bearbeitungszeiten der Aufträge auf den Maschinen werden berücksichtigt :

   Transportzeiten der Aufträge (zwischen den einzelnen Maschinen) ,
   (konstante bzw. reihenfolgeabhängige) Rüstzeiten der Maschinen ,
   Kapazitätsbelastungen der Maschinen (Zeitpunkte, zu denen die einzelnen Maschinen zur Verfügung stehen) .

   Das "Überspringen von Maschinen" durch Aufträge wird zugelassen.

3. Unter den Annahmen "ohne Überspringen von Maschinen" und "konstante Rüstzeiten" werden spezielle Problemstellungen betrachtet.

4. Das Optimierungsziel ist die Minimierung der Gesamtfertigungszeit aller Aufträge, dabei werden bei zwei Problemkomplexen von vornherein Wartezeiten der Aufträge bzw. Stillstandszeiten der Maschinen ausgeschlossen.

5. Jeder Auftragsreihenfolge entspricht umkehrbar eindeutig eine Permutation $p \in S$, wobei S die Menge aller Permutationen der Zahlen (Auftragsindizes) 1, 2, .. , m ist (Gruppe aller Permutationen m- ten Grades). Da die Gesamtfertigungszeit aller Aufträge eines jeden Problems eine Funktion $f(p)$, $p \in S$, der Auftragsreihenfolgen ist, lassen

sich die Problemstellungen allgemein folgendermaßen formulieren :

Man bestimme eine Permutation $p^* \in S$, so daß

$$f(p^*) = \min\{ f(p) \;/\; p \in S \}$$

gilt.

6. Bei vorgegebener Auftragsreihenfolge können für jedes Problem die Fertigstellungszeiten der Aufträge auf den einzelnen Maschinen und die Gesamtfertigungszeit aller Aufträge rekursiv berechnet werden.
Aus den Rekursionsformeln lassen sich Darstellungen der Zielfunktionen ableiten, in denen nur die gegebenen Größen (Transportzeiten, Rüstzeiten, Bearbeitungszeiten, Kapazitätsbelastungen der Maschinen) auftreten.

7. Die Reihenfolgeprobleme, bei denen die Bedingungen "ohne Überspringen von Maschinen" und "Verbot von Wartezeiten" zu berücksichtigen sind, können auf Rundreiseprobleme zurückgeführt werden.

8. Zur Lösung der Reihenfolgeprobleme werden Verfahren vorgeschlagen, denen die Konzeption "Branch and Bound" zugrunde liegt.
Die Verfahren beruhen auf dem folgenden (allgemeinen) Arbeitsprinzip :
Es wird schrittweise eine Klassenzerlegung $K^r(S)$ der Menge S betrachtet.
Jeder Klasse $C^r \in K^r(S)$ wird eine untere Schranke $U(C^r)$ zugeordnet mit:

$$f(p) \geq U(C^r) \quad \text{für alle } p \in C^r ,$$

wobei $U(C^r) = f(p)$ für einelementige Klassen $C^r = \{p\}$ vereinbart wird.
Falls $K^r(S)$ eine einelementige Klasse $\hat{C}^r = \{\hat{p}\}$ enthält mit

$$U(\hat{C}^r) = \min \{ U(C^r) \;/\; C^r \in K^r(S) \} ,$$

so ist $\hat{p}$ eine optimale Lösung. Andernfalls wird eine neue

Klassenzerlegung $K^{r+1}(S)$ betrachtet. Diese entsteht aus $K^r(S)$, indem in $K^r(S)$ eine ausgewählte (mehrelementige) Klasse $\tilde{C}^r \in K^r(S)$ durch eine Klassenzerlegung von $\tilde{C}^r$ ersetzt wird.

9. Bei der Konstruktion unterer Schranken, die zur Realisierung der Konzeption "Branch and Bound" benötigt werden, kommt es darauf an, den folgenden Forderungen nach Möglichkeit gerecht zu werden :

   F 1 : Der Funktionswert f(p) für eine beliebige Permutation einer betrachteten Klasse ist möglichst gut zu approximieren.

   F 2 : Die unteren Schranken sollen (relativ) einfach bestimmt werden können.

10. Es werden verschiedene Möglichkeiten der Bildung unterer Schranken für Klassen $S_{i_1,..,i_\lambda}$ von Permutationen $p \in S$, deren Elemente $i_1,..,i_\lambda$ festgelegt sind, untersucht. Die Ableitung der unteren Schranken erfolgt durch die Betrachtung bestimmter Teilmengen der in den Zielfunktionen (analytischen Darstellungen der Zielfunktionen) auftretenden Maximierungsmengen.

11. Für alle Probleme werden jeweils zwei Klassen von Schranken angegeben, wobei der höheren Qualität der Schranken der einen Klasse (B - Schranken) der geringere Berechnungsaufwand der entsprechenden Schranken der anderen Klasse (C - Schranken) gegenübersteht.

12. Teilweise sind bei der Berechnung von Schranken Minima von konstruierten (fiktiven) "Zwei- Maschinen- Problemen" zu ermitteln. Die Lösung dieser "Zwei- Maschinen- Probleme" (bzw. die Ermittlung der Minima) kann (relativ) einfach durchgeführt werden.

Bei der Berechnung der Schranken für die Probleme, bei denen reihenfolgeabhängige Rüstzeiten zugelassen werden, sind zuvor Rüstzeiten abzuschätzen.

13. Die Schranken für die Reihenfolgeprobleme, bei denen das "Überspringen von Maschinen" zugelassen wird, stellen Schranken für die Probleme, bei denen das "Überspringen von Maschinen" verboten wird, dar.

14. Für das Problem $\overline{RF}^* 3$, bei dem das "Überspringen von Maschinen" und Stillstandszeiten der Maschinen ausgeschlossen werden, konnten Schranken ($^*T^3$ - und $^*T^3$ - Schranken) konstruiert werden, die gegenüber speziellen B - Schranken wirksamer sind, da sie qualitativ besser sind und keinen größeren Berechnungsaufwand erfordern.

15. Für ein (spezielles) "Branch and Bound"- Verfahren zur Lösung von Problemen des Typs $\overline{RF}^* 3$ wurde (zur Testung) ein FORTRAN- codiertes Programm für die Rechenanlage BESM 6 erarbeitet und erprobt.
Die durchgeführten Testrechnungen, bei denen die Anzahl der Aufträge durch 20 und die Anzahl der Maschinen durch 10 begrenzt wurden, können als recht befriedigend eingeschätzt werden.